স্বাগতম

মোমেনশাহী পলিটেকনিক ইনস্টিটিউট,মোমেনশাহী

মোহাম্মদ রাইছুল ইসলাম
জুনিয়র ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক), গণিত
ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট,ময়মনসিংহ

ম্যাথমেটিক্স-২

বিষয় কোড ঃ ২৫৯২১

২য় পর্ব

সকল টেকনোলজি

অধ্যায় - ১

আংশিক ভগ্নাংশ

(Partial Fraction)

* এই অধ্যায় থেকে আমরা যা যা জানতে পারব ঃ

ক. মূলদ ভগ্নাংশ

খ. প্রকৃত ও অপ্রকৃত ভগ্নাংশ

খ. আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্তকরণ

গ. আংশিক ভগ্নাংশের সমস্যা ও সমাধান

৬.১ মূলদ ভগ্নাংশ (Rational Fraction) ঃ $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ এই ধরনের রাশিকে মূলদ বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ বলে। অথবা একটি বহুপদী হর এবং একটি বহুপদী লব নিয়ে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদ ভগ্নাংশ বলা হয়।

যেমন $\frac{2x-5}{x^2-3x+2}, \frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x-2)}$ মূলদ ভগ্নাংশ।

(যেখানে হলে n এবং r উভয়ে ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $r \leq n$)

৬.১.১ প্রকৃত ভগ্নাংশ (Proper Fraction) ঃ কোন মূলদ ভগ্নাংশের হরের মাত্রা লবের মাত্রা অপেক্ষা বেশি অর্থাৎ $\phi(x)$ এর x মাত্রা $f(x)$ এর x মাত্রা অপেক্ষা বেশি হলে $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ ভগ্নাংশটি প্রকৃত ভগ্নাংশ। যেমন , $\frac{2x-5}{x^2-3x+2}$

৬.১. অপ্রকৃত ভগ্নাংশ (Improper Fraction) ঃ কোন মূলদ ভগ্নাংশের হরের মাত্রা লবের মাত্রা অপেক্ষা কম অর্থাৎ $\phi(x)$ এর x মাত্রা $f(x)$ x এর মাত্রা অপেক্ষা কম হলে $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ ভগ্নাংশটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ। যেমন $\frac{x^3+3x}{x^2+2}$

সংক্ষিপ্ত

আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

প্রশ্ন ৩ - সমাধান ঃ $\frac{5x-12}{x^2-5x+6}=\frac{5x-12}{x^2-3x-2x+6}=\frac{5x-12}{x(x-3)-2(x-3)}=\frac{5x-12}{(x-3)(x-2)}$

ধরি, $\therefore \frac{5x-12}{(x-3)(x-2)}\equiv\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-3)}......(i)$

উভয় পক্ষকে $(x-3)(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই

$$5x-12\equiv A(x-3)+B(x-2).......(ii)$$

(ii) নং সমীকরণে x = 2 বসাই

$10-12=A(2-3)+0$

$\therefore A=2$

(ii) নং সমীকরণে x = 3 বসাই

$15-12=0+B(3-2)$

$\therefore B=3$

সুতরাং নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ $\frac{5x-12}{(x-3)(x-2)}\equiv\frac{2}{(x-2)}+\frac{3}{(x-3)}(Ans)$

প্রশ্ন ৭- সমাধান ঃ $\dfrac{6x-3}{(x+1)^2(x+2)}$

ধরি, $\dfrac{6x-3}{(x+1)^2(x+2)} \equiv \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{(x+2)}$......(i)

উভয় পক্ষকে $(x+1)^2(x+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই

$$6x-3 \equiv A(x+1)(x-2)+B(x-2)+C(x+1)^2 ....(ii)$$

(ii) নং সমীকরণে x = -1 বসাই

$$-6-3 \equiv 0+B(-1-2)+0$$

$$\therefore B=3$$

(ii) নং সমীকরণে x = 2 বসাই

$$12-3 \equiv 0+0+C(3+1)^2$$

$$9C=9$$

$$\therefore C=1$$

(ii) সমীকরণ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে

পাই $0=A+C$

$$A=-C$$

$$\therefore A=-1$$

$$\therefore \frac{6x-3}{(x+1)^2(x+2)} \equiv -\frac{1}{(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)} (Ans)$$

** $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান ঃ ধরি, $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)} \equiv \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{Bx+C}{(x^2+1)} \ldots\ldots(i)$

উভয় পক্ষকে $(x+1)(x^2+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই

$$3x-1 \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) \ldots\ldots(ii)$$

(ii) নং সমীকরণে x = -1 বসাই

$$-3-1 \equiv A(1+1) + (Bx+C)(-1+1)$$

$$\therefore 2A = -4$$

$$A = -2$$

(ii) সমীকরণ হতে x^2 এবং x এর সহগ সমীকৃত করে পাই

$$0 = A + B$$

$$B = -A$$

$$\therefore B = 2$$

$$3 = B + C$$

$$C = -B - 3$$

$$C = -2 + 3$$

$$\therefore C = 1$$

সুতরাং নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)} \equiv \dfrac{-2}{(x+1)} + \dfrac{2x+1}{(x^2+1)}$

** $\dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}$ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান ঃ ধরি, $\dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \dfrac{A}{(x-1)} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{(x-2)}......(i)$

উভয় পক্ষকে $(x-1)^2(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই

$1 \equiv A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2.......(ii)$

(ii) নং সমীকরণে x = 1 বসাই

$1 = A(1-1)(1-2) + B(1-2) + C(1-1)^2$

$1 = 0 - B + 0$

$\therefore B = -1$

(ii) নং সমীকরণে x = 2 বসাই

$1 = A(2-1)(2-2) + B(2-2) + C(2-1)^2$

$1 = 0 + 0 + C$

$\therefore C = 1$

(ii) সমীকরণ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই

$0 = A + C$

$A = -C$

$\therefore A = -1$

সুতরাং নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ $\dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \dfrac{-1}{(x-1)} - \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-2)}$

আলোচ্য পাঠ থেকে শিক্ষার্থীরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো সম্পর্কে বিস্তারিত জানতে পারবে -

১। মূলদ ভগ্নাংশ, প্রকৃত ও অপ্রকৃত ভগ্নাংশ এবং আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্তকরণ ইত্যাদি।

প্রশ্নোত্তর

ক. প্রকৃত ও অপ্রকৃত ভগ্নাংশ কাকে বলে?

খ. $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

ধন্যবাদ

স্বাগতম

মোহাম্মদ রাইছুল ইসলাম
জুনিয়র ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক), গণিত
ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট

ম্যাথমেটিক্স-২

বিষয় কোড ঃ ২৫৯২১

২য় পর্ব- সকল টেকনোলজি

২য় অধ্যায়

সূচক ধারা (Exponential Series)

* এই অধ্যায় থেকে আমরা জানতে পারব ঃ

৩.১ e এর সংজ্ঞা

৩.২ e এর মান সূচক ধারা

৩.৩ সূচক উপপাদ্য

৩.৪ a^x এর সংজ্ঞা

৩.১ e এর সংজ্ঞা ঃ

$$e = 1 + \frac{1}{|\underline{1}} + \frac{1}{|\underline{2}} + \frac{1}{|\underline{3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{|\underline{r}} + \ldots\ldots$$ অসীম পদ পর্যন্ত ধারাটিকে

সাধারণত e প্রতীক চিহ্ন সূচিত করা হয়।

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলি

৫। দেখাও যে, $\frac{2}{\underline{|1}}+\frac{6}{\underline{|2}}+\frac{12}{\underline{|3}}+\frac{20}{\underline{|4}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

সমাধান ঃ $\frac{2}{\underline{|1}}+\frac{6}{\underline{|2}}+\frac{12}{\underline{|3}}+\frac{20}{\underline{|4}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$=\frac{1.2}{\underline{|1}}+\frac{2.3}{\underline{|2}}+\frac{3.4}{\underline{|3}}+\frac{4.5}{\underline{|4}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ধারার nতম পদ $u_n=\frac{n(n+1)}{\underline{|n}}$

$$=\frac{n(n+1)}{n\underline{|n-1}}$$

$$=\frac{(n+1)}{\underline{|n-1}}$$

$$=\frac{n-1}{\underline{|n-1}}+\frac{2}{\underline{|n-1}}$$

$$=\frac{n-1}{(n-1)\underline{|n-2}}+\frac{2}{\underline{|n-1}}$$

$$=\frac{1}{\underline{|n-2}}+\frac{2}{\underline{|n-1}}$$

এখন, n=1,2,3 ....ইত্যাদি বসিয়ে পাই

$$u_1 = 0 + 2.1$$

$$u_2 = 1 + 2\frac{1}{\underline{|1}}$$

$$u_3 = \frac{1}{\underline{|1}} + 2\frac{1}{\underline{|2}}$$

$$u_4 = \frac{1}{\underline{|2}} + 2\frac{1}{\underline{|3}}$$

$$----------$$

$$-----------$$

$$----------$$

$$s = \left(1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \dots\dots\dots\right) + 2\left(1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \dots\dots\dots\right)$$

$$= e + 2e$$

$$= 3e$$

৭(i) দেখাও যে, $1+\frac{1+2}{\left|\underline{2}\right.}+\frac{1+2+3}{\left|\underline{3}\right.}+\frac{1+2+3+4}{\left|\underline{4}\right.}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{3}{2}e$

সমাধান ঃ

ধারার nতম পদ

$$u_n=\frac{1+2+3+\ldots\ldots\ldots+n}{\left|\underline{n}\right.}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2\left|\underline{n}\right.}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2n\left|\underline{n-1}\right.}$$

$$=\frac{(n+1)}{2\left|\underline{n-1}\right.}$$

$$=\frac{(n-1)+2}{2\left|\underline{n-1}\right.}$$

$$=\frac{(n-1)}{2\left|\underline{n-1}\right.}+\frac{2}{2\left|\underline{n-1}\right.}$$

$$=\frac{(n-1)}{2(n-1)\left|\underline{n-2}\right.}+\frac{1}{\left|\underline{n-1}\right.}$$

$$=\frac{1}{2\left|\underline{n-2}\right.}+\frac{1}{\left|\underline{n-1}\right.}$$

এখন, n=1,2,3 ....ইত্যাদি বসিয়ে পাই

$$u_1 = \frac{1}{2}0 + 1$$

$$u_2 = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{\underline{|1}}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}}$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}}$$

$$-----------$$

$$------------$$

$$-----------$$

$$s = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + ...\right) + \left(1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + ...\right)$$

$$= \frac{1}{2}e + e$$

$$= \frac{3}{2}e$$

৮ (i) দেখাও যে, $1+\frac{2}{\underline{|1}}+\frac{3}{\underline{|2}}+\frac{4}{\underline{|3}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

সমাধান ঃ ধারার nতম পদ

$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{n}{\underline{|n-1}} \\
&= \frac{n-1+1}{\underline{|n-1}} \\
&= \frac{n-1}{\underline{|n-1}}+\frac{1}{\underline{|n-1}} \\
&= \frac{n-1}{(n-1)\underline{|n-2}}+\frac{1}{\underline{|n-1}} \\
&= \frac{1}{\underline{|n-2}}+\frac{1}{\underline{|n-1}}
\end{aligned}
$$

এখন, n=1,2,3 ....ইত্যাদি বসিয়ে পাই

$$u_1 = 0 + 1$$

$$u_2 = 1 + \frac{1}{\underline{|1}}$$

$$u_3 = \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}}$$

$$u_4 = \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}}$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$- - - - - - - - - - -$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$s = \left(1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots\right) + \left(1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots\right)$$

$$= e + e$$

$$= 2e$$

প্রশ্নোত্তর

১. e এর সংজ্ঞা বল ?

২. e এর মান কত ?

** পরবর্তী ক্লাশে ৪র্থ অধ্যায়- “বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন” আলোচনা করবো।

ধন্যবাদ

মোহাম্মদ রাইছুল ইসলাম
জুনিয়র ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক), গণিত
ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট

ম্যাথমেটিক্স-২

বিষয় কোড ঃ ২৫৯১১

২য় পর্ব

সকল টেকনোলজি

অধ্যায়- ৩

দ্বিপদী উপপাদ্য

(Binomial Theorem

* এই অধ্যায় থেকে আমরা জানতে পারব ঃ

ক. দ্বিপদ রাশি কি ?

খ. দ্বিপদী উপপাদ্যের বর্ণনা

গ. পদ সংখ্যা,সাধারণ পদ ও মধ্যপদ ইত্যাদি

৭.১ দ্বিপদ রাশিঃ দুইটি পদের যোগফল বা বিয়োগফল আকারে প্রকাশিত যে কোন রাশিকে দ্বিপদ রাশি বলে। যেমন, a+b

৭.২ দ্বিপদী উপপাদ্য ঃ আমরা জানি, a+x একটি দ্বিপদী রাশি।

এখন $n \in N$ হলে, $(a+x)^n = {}^nc_0a^n + {}^nc_1a^{n-1}x + {}^nc_2a^{n-2}x^2 + \dots + {}^nc_ra^{n-r}x^r + \dots + {}^nc_nx^n$ হল দ্বিপদী রাশি বিস্তৃতির সূত্র। এ সূত্রটিকে সাধারণত দ্বিপদী উপপাদ্য বলা হয়। স্যার আইজ্যাক

৭.৩.১ $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ নির্ণয় ঃ

আমরা জানি, $(a+x)^n = a^n + {}^nc_1a^{n-1}x + {}^nc_2a^{n-2}x^2 + \dots + {}^nc_ra^{n-r}x^r + \dots + x^n$

এখন বিস্তৃতির পদগুলোকে যথাক্রমে $t_1, t_2, t_3, \dots\dots\ t_{r+1}$ ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করলে আমরা পাই

$$t_1 = a^n$$

$$t_2 = {}^nc_1a^{n-1}x = {}^nc_{2-1}a^{n-1}x^1$$

$$t_3 = {}^nc_2a^{n-2}x^2 = {}^nc_{3-1}a^{n-2}x^2$$

....

$t_{r+1} = {}^nc_ra^{n-r}x^r$ ইত্যাদি।

$\therefore\ t_{r+1}$ দ্বারা $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$ তম পদ সূচিত হয়েছে $(r+1)$ তম পদকে বিস্তৃতির সাধারণ পদ বলা হয়।

সুতরাং $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ $= {}^nc_ra^{n-r}x^r = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)}{\underline{|r}}a^{n-r}x^r$

অনুরুপভাবে $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ $= {}^nc_rx^r = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r$

আবার $(a-x)^n = \{a+(-x)\}^n$

$\therefore (a-x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ $= {}^nc_ra^{n-r}(-x)^r = (-1)^r\,{}^nc_ra^{n-r}x^r$.

৭.৩.২ $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয় ঃ

আমরা জানি, $(a+x)^2 = a^2 + {}^2c_1 a^{2-1} x + + x^2 ....(i)$

$$(a+x)^3 = a^3 + {}^3c_1 a^{3-1} x + {}^3c_2 a^{3-2} x^2 + x^3 ......(ii)$$

$$(a+x)^4 = a^4 + {}^4c_1 a^3 x + {}^4c_2 a^2 x^2 + {}^4c_3 a x^3 + x^4 ......(iii)$$

$$(a+x)^5 = a^5 + {}^5c_1 a^4 x + {}^5c_2 a^3 x^2 + {}^5c_3 a^2 x^3 + {}^5c_4 a x^4 + x^5 ......(iv)$$

$$= \left(\frac{2}{2} + 1\right) \qquad = \left(\frac{2}{2} + 1\right)$$

মোহাম্মদ রাইছুল ইসলাম
জুনিয়র ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক), গণিত
ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট
।

বিষয় ঃ ম্যাথমেটিক্স-২

বিষয় কোড ঃ ২৫৯২১

২য় পর্ব

সকল টেকনোলজি

অধ্যায়- ঃ ৪ ফাংশন (Fuction)

* এই অধ্যায় থেকে আমরা জানতে পারব ঃ

ক. ধ্রুবক , চলরাশি, ফাংশন, ডোমেন , পাল্লা ইত্যাদির সংজ্ঞা

খ. ফাংশন সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যা ও সমাধান ।

৬.১ (c) ফাংশন বা অপেক্ষক (Fuction) ঃ দুটি বাস্তব চলরাশি x এবং y যদি এমন ভাবে সম্পর্কিত হয় যে, কোন নির্দিষ্ট এলাকার অন্তর্গত x এর যে কোন মানের জন্য y এর সংশ্লিষ্ট একটি অনন্য (Unique) মান পাওয়া যায়, তাহলে y কে ঐ এলাকার মধ্যে x এর ফাংশন বা অপেক্ষক বলা হয়। ফাংশনকে সাধারণত y=f(x), y=g(x),
y = ɸ(x)

(d) চারণ স্থান বা ডোমেন (Domain) ঃ কোন নির্দিষ্ট এলাকায় একটি চলরাশি x যে সংখ্যাটির পরিবর্তে ব্যবহৃত হয়, ঐ সংখ্যাটিকে x এর মান বলা হয় এবং ঐ এলাকা হতে x কর্তৃক গৃহীত মানসমূহ দ্বারা গঠিত দলটিকে x এর চারণ স্থান বা ডোমেন বলা হয়।

(e) পাল্লা (Range) ঃ y=f(x) ফাংশনে x এর এলাকা হতে গৃহীত x এর মানসমূহের জন্য y অর্থাৎ f(x) এর যে মানগুলো পাওয়া যায়, তাদের দ্বারা গঠিত দলটিকে f(x) এর পাল্লা বা রেঞ্জ বলা হয়। x এর যে কোন মানের জন্য y এর যে মানটি পাওয়া যায় তাকে প্রথম মানটির প্রতিবিম্ব বলা হয়।

সংক্ষি প্রঃ ৬ । যদি y=f(x) = $\frac{lx+m}{nx-l}$ হয়, তবে দেখাও যে, f(y) =x.

সমা ঃ

$$\because y = \frac{lx+m}{nx-l}$$

$$\Rightarrow nxy - ly = lx + m$$

$$\Rightarrow nxy - lx = ly + m$$

$$\Rightarrow (ny - l)x = ly + m$$

$$\therefore x = \frac{ly+m}{ny-l}$$

$$\therefore x = f(y)$$ (প্রমাণিত)

সংক্ষি প্রঃ ১৩। f(x) $=e^{x}+e^{-x}$ হলে, দেখাও যে, f(x+y) × f(x-y) = f(2x)+ f(2y)

সমা ঃ $\because f(x)=e^{x}+e^{-x}$

$$\therefore f(x+y)=e^{x+y}+e^{-x-y}$$

$$f(x-y)=e^{x-y}+e^{-x+y}$$

$$f(2x)=e^{2x}+e^{-2x}$$

$$f(2y)=e^{2y}+e^{-2y}$$

বামপক্ষ ঃ f(x+y) × f(x-y)

$$\left\{e^{x+y}+e^{-x-y}\right\}\left\{e^{x-y}+e^{-x+y}\right\}$$

$$=\left(e^{x+y}\right)\left(e^{x-y}\right)+\left(e^{x+y}\right)\left(e^{-x+y}\right)+\left(e^{-x-y}\right)\left(e^{x-y}\right)+\left(e^{-x-y}\right)\left(e^{-x+y}\right)$$

$$=e^{x+y+x-y}+e^{x+y-x+y}+e^{-x-y+x-y}+e^{-x-y-x+y}$$

$$=e^{2x}+e^{2y}+e^{-2y}+e^{-2x}$$

$$=\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)+\left(e^{2y}+e^{-2y}\right)$$

$$=f(2x)+f(2y)$$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

সংক্ষি প্রঃ ১৫। যদি f(x)=logsinx এবং $\phi(x)=\log\cos x$ হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $e^{2\phi(a)}-e^{2f(a)}=e^{\phi(2a)}$

সমা ঃ $\because f(x)=\log\sin x$ এবং $\phi(x)=\log\cos x$

$\therefore f(a)=\log\sin a$

$\phi(a)=\log\cos a$

$\phi(2a)=\log\cos 2a$

বামপক্ষ ঃ $e^{2\phi(a)}-e^{2f(a)}$

$$=e^{2\log\cos a}-e^{2\log\sin a}$$

$$=e^{\log\cos^2 a}-e^{\log\sin^2 a}$$

$$=\cos^2 a-\sin^2 a$$

$$=\cos 2a$$

$$=e^{\log\cos 2a}$$

$$=e^{\phi(2a)}$$ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

প্রশ্নোত্তর

১. ফাংশন কাকে বলে ?

২. চারণ স্থান বা ডোমেন কাকে বলে ?

৩. পাল্লা বা রেঞ্জ কাকে বলে ?

** পরবর্তী ক্লাশে ৭ম অধ্যায়- “সীমা” আলোচনা করবো ।

* ধন্যবাদ *

মোহাম্মদ রাইছুল ইসলাম
জুনিয়র ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক), গণিত
ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট
।

ম্যাথমেটিক্স-২

বিষয় কোড ঃ ২৫৯২১

২য় পর্ব

সকল টেকনোলজি

অধ্যায়- ৫ ঃ সীমা (Limit)

* এই অধ্যায় থেকে আমরা জানতে পারব ঃ

ক. ফাংশনের সীমা।

খ. ফাংশনের সীমা সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যা ও সমাধান।

৭.১.১ ফাংশনের সীমা(Limit of a fuction) ঃ চলমান রাশি x এর মান কোন একটি ধ্রুবক a এর দিকে অগ্রসর হয়ে এমন পর্যায়ে উপনীত হয় যে, x এর মান এবং a এর পার্থক্য অর্থাৎ $|x-a|$ যে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা থেকেও ক্ষুদ্রতম হলে x এর মান $x \to a$ সংকেতের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় এবং a কে বলা হয় x এর সীমান্ত মান বা সীমা।

উদাহরণ ঃ ধরি, চলমান রাশি x= 1.9, 1.99, 1.999……. অথবা x= 2.1, 2.01, 2.001……. । উভয় ক্ষেত্রেই x এর সীমান্ত মান বা সীমা 2 ; অর্থাৎ $x \to 2$;

P.T.O

x চলক a অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর মানগুলো গ্রহণ করে ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হয়ে a এর নিকটবর্তী হওয়ায় যদি f(x) ফাংশনের মানগুলো একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর নিকটবর্তী হয়, তবে l কে f(x) ফাংশনের সীমা বলা হয়। একে $\lim_{x \to a} f(x) = l$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

৭.১.২ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন (Continuous fuction) ঃ যদি x=a বিন্দুতে ফাংশন f(x) এর মান f(a) সসীম হয় এবং $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ হয়, তবে x=a বিন্দুতে f(x) ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন বলা হয়।

অথবা x=a বিন্দুতে ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হবে যদি $\lim_{x \to a} f(a+h) = \lim_{x \to a} f(a-h) = f(a)$ হয়।

* প্রয়োজনী সূত্র ঃ

(i) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

(iv) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$

(vii) $\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$

(ix) $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$

(ii) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1$

(v) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\tan\theta} = 1$

(viii) $\lim_{\theta \to 0} \sec\theta = 1$

(x) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(iii) $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 1$

(vi) $\lim_{\theta \to 0} \tan\theta = 1$

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি

* নিম্নের লিমিটগুলো মান নির্ণয় কর ।

৫ । $\lim_{x \to 0} \frac{x}{2-\sqrt{4-x}}$

* সমা : $\lim_{x \to 0} \frac{x}{2-\sqrt{4-x}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(2+\sqrt{4-x})}{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(2+\sqrt{4-x})}{4-4+x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(2+\sqrt{4-x})}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} (2+\sqrt{4-x})$$

$$= 2+\sqrt{4-0}$$

$$= 4$$

$$= (Ans)$$

১৫ । $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 7x}{3x^2}$

সমা : $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 7x}{3x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{7x}{2}}{3x^2}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sin \frac{7x}{2}\right)^2}{\left(\frac{7x}{2}\right)^2} \times \frac{49}{4}$$

$$= \frac{2}{3} \times 1 \times \frac{49}{4}$$

$$= \frac{49}{6}$$

$$= (Ans)$$

১৫। $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

সমা : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x.2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{1}{4}$$

$$=2\times 1\times 1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}(Ans)$$

২০। $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

সমা : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\cos x.\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{\cos x(1-\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{1}{\cos 0(1+\cos 0)}$$

$$=\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}(Ans)$$

প্রশ্নোত্তর

১. ফাংশন কাকে বলে ?

২. চারণ স্থান বা ডোমেন কাকে বলে ?

৩. পাল্লা বা রেঞ্জ কাকে বলে ?

** পরবর্তী ক্লাশে ৭ম অধ্যায়- “সীমা” আলোচনা করবো ।

* ধন্যবাদ *

মোহাম্মদ রাইছুল ইসলাম
জুনিয়র ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক), গণিত
ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট
।

ম্যাথমেটিক্স-২
বিষয় কোড ঃ ২৫৯২১
২য় পর্ব
সকল টেকনোলজি

অধ্যায়- ৬ ঃ মূল নিয়মে অন্তরক সহগ

(Differential Co-efficient From First Priciple)

* এই অধ্যায় থেকে আমরা জানতে পারব ঃ

ক. অন্তরক সহগ, অন্তরীকরণ ইত্যাদির সংজ্ঞা

খ. মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয়ের সূত্র।

গ. মূল নিয়মে বিভিন্ন ফাংশন সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যা ও সমাধান।

৮.০ অন্তরক সহগ (Differential co-efficient) ঃ একটি স্বাধীন চলরাশি x এর সাপেক্ষে অধীন চলরাশি y এর পরিবর্তনের হার নির্ণয়ই $\frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{dy}{dx}$ কে x এর সাপেক্ষে y এর এর অন্তরক সহগ বলে।

অন্তরীকরণ (Differentiation) ঃ $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করাকেই অন্তরীকরণ বলে।

৮.১ মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয়ের সূত্র ঃ $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

যেখানে y =f(x),

৮.২ মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (ii) e^x (iii) a^x (iv) $\log_e x$ (v) $\sin x$ (vi) $\cos x$ (vii) $\sqrt{x}$

সমা ঃ (ii) ধরি, $y = f(x) = e^x$

$$\therefore f(x+h) = e^{x+h}$$

আমরা জানি $\dfrac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h}$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{1 + \frac{h}{\underline{|1}} + \frac{h^2}{\underline{|2}} + \frac{h^3}{\underline{|3}} + \dots\dots\dots - 1}{h}$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{\underline{|1}} + \frac{h^2}{\underline{|2}} + \frac{h^3}{\underline{|3}} + \dots\dots\dots}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{h\left\{1 + \frac{h}{\underline{|2}} + \frac{h^2}{\underline{|3}} + \dots\dots\dots\right\}}{h}$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \left\{1 + \frac{h}{\underline{|2}} + \frac{h^2}{\underline{|3}} + \dots\dots\dots\right\} = e^x \{1 + 0 + 0 + 0 + \dots\dots\dots\}$$

$$= e^x (Ans)$$

৮.২ মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (ii) e^x (iii) a^x (iv) $\log_e x$ (v) $\sin x$ (vi) $\cos x$ (vii) $\sqrt{x}$

সমা ঃ (ii) ধরি, $y = f(x) = e^x$

$$\therefore f(x+h) = e^{x+h}$$

আমরা জানি $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h}$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{1 + \frac{h}{\underline{|1}} + \frac{h^2}{\underline{|2}} + \frac{h^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots - 1}{h}$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{\underline{|1}} + \frac{h^2}{\underline{|2}} + \frac{h^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{h\left\{1 + \frac{h}{\underline{|2}} + \frac{h^2}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots\right\}}{h}$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \left\{1 + \frac{h}{\underline{|2}} + \frac{h^2}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots\right\} = e^x \{1+0+0+0+\ldots\ldots\ldots\}$$

$$= e^x (Ans)$$

৮.২ মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (ii) e^x (iii) a^x (iv) $\log_e x$ (v) $\sin x$ (vi) $\cos x$ (vii) $\sqrt{x}$

সমা ঃ (iii)ধরি, $y = f(x) = a^x$

$$\therefore f(x+h) = a^{x+h}$$

আমরা জানি $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x . a^h - a^x}{h}$$

$$= a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{1 + \frac{h(\log a)}{\underline{|1}} + \frac{h^2(\log a)^2}{\underline{|2}} + \frac{h^3(\log a)^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots - 1}{h}$$

$$= a^x \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h(\log a)}{\underline{|1}} + \frac{h^2(\log a)^2}{\underline{|2}} + \frac{h^3(\log a)^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots}{h}$$

$$= a^x \lim_{h \to 0} \frac{h \log a \left\{1 + \frac{h(\log a)}{\underline{|2}} + \frac{h^2(\log a)^2}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots\right\}}{h} = a^x \log a \lim_{h \to 0} \left\{1 + \frac{h(\log a)}{\underline{|2}} + \frac{h^2(\log a)^2}{\underline{|3}} + \ldots\ldots\ldots\right\}$$

$$= a^x \log a \{1 + 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots\ldots\} = a^x \log a = (Ans)$$

৮.২ মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (ii) e^x (iii) a^x (iv) $\log_e x$ (v) $\sin x$ (vi) $\cos x$ (vii) $\sqrt{x}$

সমা ঃ (iv) ধরি, $y = f(x) = \log_e x$

$$\therefore f(x+h) = \log_e(x+h)$$

আমরা জানি $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_e(x+h) - \log_e x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_e\left\{\frac{x+h}{x}\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \dots\dots\dots\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}\left[\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \dots\dots\dots\right]$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \left\{1 + \frac{h}{\underline{|2}} + \frac{h^2}{\underline{|3}} + \dots\dots\dots\right\}$$

$$= \frac{1}{x}(1+0+0\dots\dots)$$

$$= \frac{1}{x}(Ans)$$

৮.২ মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (ii) e^x (iii) a^x (iv) $\log_e x$ (v) $\sin x$ (vi) $\cos x$ (vii) $\sqrt{x}$

সমা ঃ (v) ধরি, $y = f(x) = \sin x$

$$\therefore f(x+h) = \sin(x+h)$$

আমরা জানি $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos(x+0).1$$

$$= \cos x$$

$$= (Ans)$$

৮.২ মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (ii) e^x (iii) a^x (iv) $\log_e x$ (v) $\sin x$ (vi) $\cos x$ (vii) $\sqrt{x}$

সমা ঃ (vi) ধরি, $y = f(x) = \cos x$

$$\therefore f(x+h) = \cos(x+h)$$

আমরা জানি $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x-x-h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \times \lim_{h \to 0} \frac{-\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \sin(x+0).(-1)$$

$$= -\sin x$$

$$= (Ans)$$

৮.২ মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (ii) e^x (iii) a^x (iv) $\log_e x$ (v) $\sin x$ (vi) $\cos x$ (vii) $\sqrt{x}$

সমা ঃ (vi) ধরি, $y = f(x) = \sqrt{x}$

$$\therefore f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

আমরা জানি $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x+0} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} = (Ans)$$

প্রশ্নোত্তর

ক. অন্তরক সহগ, অন্তরীকরণ সংজ্ঞা লিখ।

খ. মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয়ের
লিখ।

ধন্যবাদ

মোহাম্মদ রাইছুল ইসলাম
জুনিয়র ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক), গণিত
ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট
।

ম্যাথমেটিক্স-২
বিষয় কোড ঃ ২৫৯২১
২য় পর্ব
সকল টেকনোলজি

অধ্যায়-৭ ঃ ফাংশনের অন্তরীকরণ সহগ

(Differentiation of Fuction)

* এই অধ্যায় থেকে আমরা জানতে পারব ঃ

ক. অন্তরীকরণের সূত্র।

খ. বিভিন্ন ফাংশনের অন্তরীকরণ ।

প্রয়োজনীয় সূত্রঃ

1. $\frac{d}{dx}(c)=0$

2. $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

3. $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$

4. $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x \log_e x$

5. $\frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}$

6. $\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e$

7. $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$

8. $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

9. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

10. $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$

11. $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\operatorname{cosec}^2 x$

12. $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x \tan x$

13. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)=-\operatorname{cosec} x \cot x$

14. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)=\frac{1}{1+x^2}$

16. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x)=-\frac{1}{1+x^2}$

17. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x)=\frac{1}{x(x^2-1)}$

18. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x)=-\frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$

19. $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

20. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলি

প্রশ্ন ২(i) $\frac{2}{3}\sin x \log x$

সমাধান ঃ ধরি $y = \frac{2}{3}\sin x \log x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left\{\sin x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(\sin x)\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\left\{\sin x \frac{1}{x} + \log x \cos x\right\}, (Ans)$$

প্রশ্ন ৩(i) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

সমাধান ঃ ধরি, $y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}-1\right)+\left(\sqrt{x}-1\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}+\left(\sqrt{x}-1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}.2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2},\ (Ans\ \ )$$

প্রশ্ন ৩(i) $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

সমাধান ঃ ধরি, $y = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(1+\sin x) + (1+\sin x)\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\sin x)\cos x + (1+\sin x)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} + \left(\sqrt{x}-1\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}.2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}, (Ans)$$

মোহাম্মদ রাইছুল ইসলাম
জুনিয়র ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক), গণিত
ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-২ কোড : ২৫৯২১

টেকনোলজি : সকল

অধ্যায় –৭
প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x . \log_e a$

3. $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

4. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

5. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

6. $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}\,x) = -\mathrm{cosec}\,x.\cot x$

7. $\frac{d}{dx}(x) = 1$

8. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

9. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1-x^2}$

11. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}) = \frac{1}{1-x^2}$

12. $\frac{d}{dx}\left(\frac{U}{v}\right) = \frac{V\frac{d}{dx}(u) - u.\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

13. $\frac{d}{dx}(\sin ax) = a \cos ax$

14. $\frac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$

15. $\frac{d}{dx}[(ax+b)^n] = an(ax+b)^{n-1}$

16. $\frac{d}{dx}(\text{cosec } ax) = -\text{cosec } ax \tan ax$

17. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

18. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

19. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

20. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$

21. $\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$

22. $\frac{d}{dx}$(cosx) = - sinx

23. $\frac{d}{dx}$(cotx) = - cosec^{2}x

24. $\frac{d}{dx}$ (secx) = secx x. tanx

25. $\frac{d}{dx}$(ax) = a

26. $\frac{d}{dx}$ ($\sin^{-1}$x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

27. $\frac{d}{dx}$ (tan-1x) = $\frac{1}{1+x^2}$

28. $\frac{d}{dx}$ (cosec-1x) = - $\frac{1}{X\sqrt{X^2-1}}$

29. $\frac{d}{dx}$ (u.v) = u $\frac{d}{dx}$ (v) + v $\frac{d}{dx}$ (u)

30. $\frac{d}{dx}$ (e^{ax}) = ae^{ax}

31. $\frac{d}{dx}$ (cos ax) = -a sin ax

32. $\frac{d}{dx}$(cot ax) = - a cosec2 ax

33. $\frac{d}{dx}$(sec ax) = a sec ax tan ax

অধ্যায় -৭

অন্তরীকরণের ধারণা

১. $\frac{\tan x + \cot x}{3e^x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan x + \cot x}{3ex}\right)$$

$$= \frac{3e^x \frac{d}{dx}(\tan x + \cot x) - (\tan x + \cot x)\frac{d}{dx}(3ex)}{(3e^x)^2}$$

$$= \frac{3e^x(\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x) - (\tan x + \cot x)\,3e^x}{9e^{2x}}$$

$$= \frac{3e^x(\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x - \tan x - \cot x)}{9e^{2x}}$$

$$= \frac{\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x - \tan x - \cot x}{3e^x}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 x - 1 - \cot^2 x - \tan x - \cot x}{3e^x}$$

$$= \frac{\tan^2 x - \cot^2 x - \tan x - \cot x}{3e^x}$$

$$= \frac{(\tan x - \cot x)(\tan x + \cot x) - (\tan x + \cot x)}{3e^x}$$

$$= \frac{(\tan x - \cot x)(\tan x + \cot x - 1)}{3e^x}$$

Ans

2. **$y = x(x^2 - 12)$ হলে , x এর কোন মানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে**

সমাধান : $y = x^3 - 12$

$$\frac{d}{dx} = 3x^2 - 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$X^2 = 4$$

$$X = +2$$

Ans

3. sec^2 (log cosx) সমাধান :

$$\frac{d}{dx}[\sec^2(\log \cos x)]$$

$$= 2\sec(\log \cos x) \cdot \frac{d}{dx}[\sec(\log \cos x)]$$

$$= 2\sec(\log \cos x) \cdot \sec(\log \cos x)\tan(\log \cos x) \times \quad (\log \cos x)$$

$$= 2\sec^2(\log \cos x) \cdot \tan(\log \cos x) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= 2\,\mathrm{see}^2(\log \cos x) \cdot \tan(\log \cos x) \cdot \frac{1}{\cos x}(-\sin x)$$

$$= -2\sec^2(\log \cos x)\tan(\log \cos x)\tan x$$

Ans

অধ্যায় ৮

$\frac{dy}{dx}$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

লগারিদম সূত্রের সাহায্যে অন্তরীকরণ :

1. x-cos-1x

সমাধান :

ধরি, $y = x^{\cos^{-1}x}$

$\log y = \cos^{-1} x . \log x$

উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos^{-1}x\,\frac{1}{x} + \log x . X - \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{\cos^{-1}x}{x} \quad \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$$

$$= x^{\cos-1x}\ \frac{\cos^{-1}x}{x} \quad \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ans

2. y = (x + 1) (x - 1) (x – 3) বক্ররেখাটি যে–সব বিন্দুতে X অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুগুলোতে সেটির ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান :

$y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$

বা, $y = (x^2 - 1)(x - 3) = x^3 - x - 3x^2 + 3$

বা, $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ ....(i)

সমীকরণ (i)-কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dx}{dy} = 3x^2 - 6x - 1$

আবার, যেহেতু বক্ররেখাটি X-অক্ষকে ছেদ করে, সুতরাং y = 0

$(x + 1)(x - 1)(x - 3) = 0$

$x + 1 = 0$ বা, $x = -1$

অথবা, $x - 1 = 0$ বা, $x = 1$

এবং $x - 3 = 0$ বা, $x = 3$. [বাকাশিবো–'৯৬, ২০০০, ১৪ (T.T)] :.

ছেদবিন্দুর স্থানাংক = (–1, 0) (1, 0) (3,0)

সুতরাং, (−1,0) বিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 3(-1)^2-6.(-1) -1=8$

(1, 0) " " " " $\frac{dy}{dx}$ = 3 (1)2-6 (1) -1=-4

(3,0) বিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx}=3(3)2-6(3)-1=8$

রেখাটির ঢালগুলো যথাক্রমে 8, 4, 8

(Ans.)

3. $x^2 + y - 2x - 3 = 0$ সঞ্চার পথের যে বিন্দুতে স্পর্শক X-অক্ষের সমান্তরাল তা নির্ণয় কর।

-**সমাধান**

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

বা, $2x + 2y.\frac{dy}{dx} - 2 = 0$

বা, $2y.\frac{dy}{dx} = 2 - 2x$

বা, $y \frac{dy}{dx} = 1 - x$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{y}$

(x, y) বিন্দুতে স্পর্শকটির ঢাল, $= \frac{dy}{dx} \quad \frac{1 - x}{y}$

যে–সব বিন্দুতে স্পর্শক X-অক্ষের সমান্তরাল, সে–সব বিন্দুতে

$\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{1 - x}{y} = 0$

বা, $1 - x = 0$

$\therefore x = 1$

x-এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, (

$(1)^2 + y^2 - 2(1) - 3 = 0$

বা, $y^2 = 2 + 3 - 1 = 4$.

. $y = \pm 2$

.: নির্ণেয় বিন্দু = (1, ° 2)

(Ans.)

4. $x^2 + 2ax + y = 0$ বক্ররেখাটির উপর এমন বিন্দুগুলো বের কর, যেখানে স্পর্শকসমূহ X-অক্ষের উপর লম্ব হয়।

সমাধান :

$x^2 + 2ax + y^2 = 0$ ....(i)

বা, $y^2 = -x^2 - 2ax$

উভয়পক্ষক্ষে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2y\frac{dy}{dx} = -2x - 2a$

$= \frac{(x + a)}{y}$

স্পর্শক X-অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dy}{dx} = \infty$

বা, $-\frac{(x + a)}{y} = \infty$

বা, $y = 0$

$y = 0$ হলে (i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$x^2 + 2ax = 0$

বা, $x(x + 2a) = 0$

$\therefore x = 0, -2a$

নির্ণেয় বিন্দুগুলো (0, 0) এবং (– 2a, 0)

(Ans.)

নবম অধ্যায়

পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণের সমস্যা সমাধানে লিবনীজের উপপাদ্যের ব্যবহার

1. $y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$ হলে, দেখাও যে, $y^2 - m^2y = 0$

বা, $y^1 = Ame^{mx} - Bme^{-mx}$
বা , $y^2 = Am^2 e^{mx} + Bm^2 e^{-mx}$
বা , $y^2 = m^2 (Ae^{mx} + Be^{-mx})$
বা , $y^2 = m^2y$
.. $y^2 - m^2y = 0$
(Showed)

2. $y = e^{\tan^{-1}}x$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$

সমাধান

$y = e^{\tan^{-1}}x$

বা, $y1 = e^{\tan^{-1}}x. \dfrac{1}{1 + x^2}$

বা ,$Y1 = \dfrac{1}{1 + x^2}$

বা, $(1 + x^2)y_1 + y$

বা, $(1 + x^{2)}y_2 \;\; + y_1 (2x) = y_1$

..$(1 + x^2) y^2 + (2x - 1) y_1 = 0$

(Showed)

অধ্যায় ১০
আংশিক অন্তরীকরণ

১. যদি $u = x^2y + y^2z + z^2x$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে , $ux + uy + uz = (x + y + z)^2$

সমাধান

$u = x^2y + y^2z + z^2x$

$u^x = 2xy + z^2$

$u^y = x^2 + 2zx$

$u^z = y^2 + 2zx$

$u^x + u^y + u^z = 2xy + z^2 + x^2 + 2yz + y^2 + 2zx$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2 yz + 2zx$

$(x+ y + z)^2$

∂ 2.যদি $u = \log(x^2 + y - 2xy)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

সমাধান

$u = \log(x^2 + y^2 - 2xy) = \log(x-y)^2 = 2\log(x - y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2.\frac{1}{X-y}.1 = \frac{2}{X-y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2.\frac{1}{X-y}(-1) = \frac{2}{X-y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{X-y} \quad \frac{2}{X-y} = 0$$

(প্রমাণিত)

অধ্যায়-৯

লিবনীজ উপপাদ্য

যদি x চলকের দুটি ফাংশনের n-তম অন্তরক নির্ণয় করা যায়, তবে এদের গুনফলের n-তম অন্তরক সহগ নির্ণয় করার জন্য জার্মান গণিতবিদ গটফ্রেট উইলিয়াম লিবনীজ (Gottfried William Leibnitz) একটি সূত্র আবিষ্কার করেন। এই সূত্রটিকে তাঁর নামানুসারে লিবনীজ উপপাদ্য বলা হয়।

লিবনীজ উপপাদ্য ঃ যদি u এবং v প্রত্যকেই x এর ফাংশন হয়, তবে এদের গুনফলের n-তম অন্তরক সহগ হলো,

$$(uv)_n = uv_n + {}^nc_1u_1v_{n-1} + {}^nc_2u_2v_{n-2} + {}^nc_3u_3v_{n-3} + \dots\dots\dots + {}^nc_ru_rv_{n-r} + \dots\dots + u_nv$$

যখন u এবং v এর সূচকগুলো x এর সাপেক্ষে কতবার অন্তরক সহগ হয়েছে তা নির্দেশ করে।

প্রমাণঃ ধরি

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$y_1 = uv_1 + u_1 v$$

$$y_2 = uv_2 + u_1 v_1 + u_1 v_1 + u_2 v$$

$$y_2 = uv_2 + 2u_1 v_1 + u_2 ....(i)$$

$$y_2 = uv_2 + {}^2c_1 u_1 v_{2-1} + u_2 v \left[\because {}^2c_1 = 2\right]$$

আবার (i)নং এর উভয় পক্ষকে x অন্তরীকরণ করে পাই

$$y_3 = uv_3 + u_1 v_2 + 2(u_1 v_2 + u_2 v_1) + u_2 v_1 + u_3 v$$

$$y_3 = uv_3 + 3u_1 v_2 + 3u_2 v_1 + u_3 v$$

$$y_3 = uv_3 + {}^3c_1 u_1 v_2 + {}^3c_2 u_2 v_1 + u_3 v$$

$$y_3 = uv_3 + {}^3c_1 u_1 v_{3-1} + {}^3c_2 u_2 v_{3-2} + u_3 v$$

অতএব, উপপাদ্যটি এবং এর জন্য সত্য।

ধরি, উপপাদ্যটি এর জন্য সত্য।

প্রশ্ন : $y=(\sin^{-1})^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2-xy_1=2$

অথবা $\sin\sqrt{y}=x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2$

সমাধান ঃ $y=(\sin^{-1})^2$

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$y_1=2\sin^{-1}x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2}\,y_1=2\sin^{-1}x$$

$$(1-x^2)y_1^2=4(\sin^{-1}x)^2=4y$$

আবার x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$(1-x^2)2y_1y_2-2xy_1^2=4y_1$$

$$(1-x^2)y_2-xy_1=2$$ (প্রমাণিত)

$y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$ হলে, প্রমাণ কর যে , $y_2-m^2y=0$

সমাধান ঃ $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$y_1 = Ame^{mx} - Bme^{-mx}$$

$$y_2 = Am^2e^{mx} + Bm^2e^{-mx}$$

$$y_2 = m^2(Ae^{mx} + Be^{-mx}) = m^2y$$

$y_2 - m^2y = 0$ (প্রমাণিত)

$y = e^{a\sin^{-1}x}$ হলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $(1-x^2)y_2 - xy_1 - ay = 0$

(ii) $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2-a^2)y_n = 0$

সমাধান ঃ (i) $y = e^{a\sin^{-1}x}$

$$y_1 = ae^{a\sin^{-1}x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{(1-x^2)}y_1 = ae^{a\sin^{-1}x}$$

$$(1-x^2)y_1^2 = a^2y^2$$

$$(1-x^2)2y_1y_2 - 2xy_1^2 = 2a^2yy_1$$

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 - a^2y = 0 ....(i)$$

(ii) $\left(1-x^2\right)y_2 - xy_1 - a^2 y = 0$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\left(1-x^2\right)y_{n+2} + {}^n c_1(-2x)\,y_{n+1} + {}^n c_2(-2)\,y_n - xy_{n+1} - {}^n c_1(1)\,y_n - a^2 y_n = 0$$

$$\left(1-x^2\right)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} + {}^n c_1 - n(n-1)\,y_n - xy_{n+1} - xy_n - a^2 y_n = 0$$

$$\left(1-x^2\right)y_{n+2} - (2n+1)\,xy_{n+1} - (n^2 + a^2)\,y_n = 0$$

(প্রমাণিত)

স্বাগতম

মোহাম্মদ রাইছুল ইসলাম
জুনিয়র ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক), গণিত
ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-২ কোড : ২৫৯২১
টেকনোলজি : সকল

অধ্যায়-১০
আংশিক অন্তরীকরণ (Partial differention)

আংশিক অন্তরীকরণ(definition Partial Derivatives): একাধিক স্বাধীন চলকের ফাংশনকে একটি স্বাধীন চলকের সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় করার সময় ঐ স্বাধীন চলক ব্যতীত অন্যান্য স্বাধীন চলককে ধ্রুবক ধরে অন্তরক সহগ নির্ণয় করার পদ্ধতি আংশিক অন্তরীকরণ বলা হয়।

মনে করি, $u=f(x,y)$ দুটি স্বাধীন চলরাশি x ও y এর একটি ফাংশন। y কে ধ্রুবক ধরে u কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে যে অন্তরক সহগ পাওয়া যায় তাকে x এর সাপেক্ষে $u=f(x,y)$ এর আংশিক অন্তরক সহগ বলা হয় এবং একে $\frac{\delta u}{\delta x}$ বা u_x, $\frac{\delta f}{\delta x}$ বা f_x প্রতীক দ্বারা প্রকাশ বলা হয়।

অনুরূপে x কে ধ্রুবক ধরে u কে y এর আংশিক অন্তরক সহগকে $\frac{\delta u}{\delta y}$ বা u_y, $\frac{\delta f}{\delta y}$ বা f_y প্রতীক দ্বারা প্রকাশ বলা হয়।

সম্পূর্ণ অন্তরক সূত্র(Total Differential) : যদি $u = f(x, y)$ এবং $x = \phi(t), y = \psi(t)$ হয়, তবে $\frac{du}{dt} = \frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dt}$ হবে যদি $\frac{dx}{dt}$ এবং $\frac{dy}{dt}$ অস্তিত্ব বিদ্যমান থাকে।

সমমাত্রিক ফাংশন (Homogeneous Fuction) : যদি কোনো বহুপদ বিশিষ্ট ফাংশনের প্রত্যক পদের x ও y এর ঘাত (Power) যোগ করলে সমান হয়, তাহলে ঐ ফাংশনকে সমমাত্রিক ফাংশন বলা হয়।

ধরি , $f(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + a_3x^{n-3}y^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_ny^n$

এখানে প্রতিটি পদে x ও y এর মাত্রা যোগ করলে মাত্রা হয় n কাজেই f(x,y) একটি সমমাত্রিক ফাংশন।

সমমাত্রিক ফাংশনের জন্য অয়লারের উপপাদ্য (Euler`s Theorem Homogeneous Fuction) : u যদি x ও y চলকের n ঘাতের সমমাত্রিক ফাংশন হয় তবে $x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=nu$

প্রমাণ : যেহেতু u যদি x ও y চলকের n ঘাতের সমমাত্রিক ফাংশন

সুতরাং $u=x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$............$(i)$

$$\therefore \frac{\delta u}{\delta x}=x^n f'\left(\frac{y}{x}\right)\times\left(\frac{-y}{x^2}\right)+nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}=-yx^{n-2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x\frac{\delta u}{\delta x}=-yx^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right)+nx^{n}f\left(\frac{y}{x}\right)\text{..........}(ii)$$

আবার, $\frac{\delta u}{\delta x}=x^n f'\left(\frac{y}{x}\right)\times\left(\frac{1}{x}\right)=x^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right)$

$$y\frac{\delta u}{\delta x}=yx^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right)\text{............}(iii)$$

(ii) ও (iii) যোগ করে পাই $x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=nx^n f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=nu$$

প্রশ্ন : যদি $v=x^2+y^2+z^2$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 v}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 v}{\delta z^2}=6$

সমাধান ঃ $\because v=x^2+v^2+z^2........(i)$

x এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরীকরণ করে পাই

$\frac{\delta v}{\delta x}=2x$ এবং $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}=2$

$\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}=2$

অনুরুপে, (i) নং কে y ও z এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরীকরণ করে পাই

$\frac{\delta v}{\delta y}=2y$

$\frac{\delta^2 v}{\delta y^2}=2$

$\frac{\delta v}{\delta z}=2z$

$\frac{\delta^2 v}{\delta z^2}=2$

$$\therefore \frac{\delta^2 v}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 v}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 v}{\delta z^2}=2+2+2=6$$

প্রশ্ন : যদি $u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$

সমাধান ঃ $u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{y}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) = \frac{\delta}{\delta x}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = -\left[\frac{\left(x^2 + y^2\right) \cdot 0 - y \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right] =$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta u}{\delta y}\right) = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = \frac{\left(x^2 + y^2\right) \cdot 0 - x \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = -\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\therefore \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} - \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = 0$$

প্রশ্ন ৬: যদি $u=\log\left(x^2+y^2-2xy\right)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\delta u}{\delta x}+\dfrac{\delta u}{\delta y}=0$

সমাধান ঃ $=\log\left(x^2+y^2-2xy\right)=\log(x-y)^2=2\log(x-y)$

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{2}{x-y}$$

$$u=2\log(x-y)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{2}{x-y}$$

$$\therefore\ \frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta y}=\frac{2}{x-y}-\frac{2}{x-y}=0$$

প্রশ্ন ২৩: যদি $u=\cos^{-1}\dfrac{x}{y}+\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x\dfrac{\delta u}{\delta x}+y\dfrac{\delta u}{\delta y}=0$

সমাধান ঃ

$$u=\cos^{-1}\frac{x}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\therefore\ \frac{\delta u}{\delta x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\times\frac{1}{y}+\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\times\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}=-\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ x\frac{\delta u}{\delta x}=-\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$u=\cos^{-1}\frac{x}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\therefore\ \frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\times\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\times\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y}=\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ y\frac{\delta u}{\delta y}=\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

প্রশ্ন ৩৯(i): $u = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$ এর ক্ষেত্রে অয়লারের সূত্র প্রমাণ কর।

সমাধান ঃ

সমাধান ঃ $u = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$

এখানে, u ফাংশনটি x ও y চলকের 3 বিশিষ্ট সমমাত্রিক ফাংশন।

সুতরাং প্রমাণ করতে হবে যে, $x\frac{\delta u}{\delta x} + y\frac{\delta u}{\delta y} = 3u$

$$u = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 3x^2 + 6xy + 3y^2$$

$$u = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = 3y^2 + 3x^2y + 6xy$$

$$\begin{aligned}
\therefore x\frac{\delta u}{\delta x} + y\frac{\delta u}{\delta x} &= x\left(3x^2 + 6xy + 3y^2\right) + y\left(3x^2 + 6xy + 3y^2\right) \\
&= x\left(3x^2 + 6xy + 3y^2\right) + y\left(3x^2 + 6xy + 3y^2\right) \\
&= 3x^3 + 6x^2y + 3xy^2 + 3yx^2 + 6xy^2 + 3y^3 \\
&= 3x^3 + 9x^2y + 9xy^2 + 3y^3 \\
&= 3\left(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right)
\end{aligned}$$

(প্রমাণিত)

অধ্যায় -১১
অনির্দিষ্ট যোজিতফল

** ফাংশন সমূহের অন্তরক সহগ এবং তাদের সমাকলিত সম।

$(i)\ \frac{d}{dx}\left(x^{n}\right) = nx^{n-1}$

$(ii)\ \frac{d}{dx}\left(\log x\right) = \frac{1}{x}$

$(iii)\ \frac{d}{dx}\left(e^{x}\right) = e^{x}$

$(iv)\ \frac{d}{dx}\left(e^{mx}\right) = me^{mx}$

$(v)\ \frac{d}{dx}\left(a^{x}\right) = a^{x}.\log_{e} a$

$(vi)\ \frac{d}{dx}\left(\sin x\right) = \cos x$

$(vii)\ \frac{d}{dx}\left(\cos x\right) = -\cos x$

$(viii)\ \frac{d}{dx}\left(\tan x\right) = \sec^{2} x$

$(i)\int x^{n} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$(ii)\int \frac{1}{x} dx = \log x$

$(iii)\int e^{x} dx = e^{x}$

$(iv)\int e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx}$

$(v)\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\log_{e} a}$

$(vi)\int \cos x dx = \sin x$

$(vii)\int \sin x dx = -\cos x$

$(viii)\int \sec^{2} x dx = \sec x \tan x$

$$(ix)\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$(x)\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$(xi)\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$(xii)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(xiii)\frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos ax$$

$$(xiv)\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a\sin ax$$

$$(ix)\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x$$

$$(x)\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$$

$$(xi)\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x$$

$$(xii)\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$(xiii)\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

** প্রয়োজনীয় সূত্র ঃ

$$1.\int \tan x dx = -\log\cos x = \log\sec x$$

$$2..\int \cot x dx = \log\sin x = -\log\operatorname{cosec} x$$

$$3.\int \sec x dx = \log(\sec x + \tan x)$$

$$4.\int \operatorname{cosec} x dx = \log\tan\frac{x}{2}$$

$$5.\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$6.\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x$$

$$7.\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}$$

$$8.\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}$$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \sin^{-1} x$

11. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \log\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$

13. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$

14. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$

15. $\displaystyle\int (uv)dx = u\int v\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u)\int v\,dx\right\}dx$

** ফাংশন সমূহের যোজিতফল(সমাকলিত মান) নির্ণয় কর ঃ

*২(i) ঃ $\int \tan^2 dx$

$$= \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \tan x - x + c (Ans)$$

৩(ii) ঃ $\int 5\cos 4x \sin 3x dx$

$$= \frac{5}{2}\int 2\cos 4x \sin 3x dx$$

$$= \frac{5}{2}\int [\sin(4x+3x) - \sin(4x-3x)] dx$$

$$= \frac{5}{2}\int (\sin 7x - \sin x) dx$$

$$= \frac{5}{2}\left[-\frac{\cos 7x}{7} - \cos x\right] + c, (Ans)$$

৩(iii) ঃ

$$\int \sin 5x \sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2\sin 5x \sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos(5x-3x) - \cos(5x+3x)] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 8x}{8}\right] + c$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + c, (Ans)$$

৪(iii) ঃ

$$\int \sin^4 x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(2\sin^2 x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx$$

$$== \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\int dx - 2\int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{x - 2\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}\int 2\cos^2 2x dx\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right\} + c$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}x - \sin 2x + + \frac{1}{8}\sin 4x\right\} + c$$

৫(i) ঃ

$$\int e^{\tan^{-1} x}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$let, z = \tan^{-1} x$$

$$dz = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\therefore \int e^z dz$$

$$= e^z + c$$

$$= e^{\tan^{-1} x} + c$$

(Ans)

১৬(i) ঃ $\int x\tan^{-1}x\,dx$

$$= \tan^{-1}x\int x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)\int x\,dx\right\}$$

$$= \tan^{-1}x\,\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{\left(1+x^2\right)-1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\left\{1-\frac{1}{1+x^2}\right\}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + c$$

(Ans)