মুহাম্মদ আবু ইউসুফ
চিফ ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক), গণিত
ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট

ম্যাথমেটিক্স-১

বিষয় কোড ঃ ২৫৯১১

১ম পর্ব

সকল টেকনোলজি

২য় অধ্যায়

নির্ণায়ক

(Determinant)

* এই অধ্যায় থেকে আমরা জানতে পারব ঃ

ক. নির্ণায়ক এর সংজ্ঞা

খ. নির্ণায়কের বিস্তৃতি

গ. অনুরাশি ও সহগুণক এর সংজ্ঞা

ঘ. নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান

১.১ নির্ণায়ক(Determinant)ঃ কতকগুলো রাশি বা পদকে দুটি খাড়া রেখার বন্ধনীর মধ্যে নির্দিষ্ট নিয়মে সমান সংখ্যক কলাম ও সারিতে বর্গাকৃতি উপায়ে সাজানো হলে যে বিন্যাসটি পাওয়া যায়, তাকে নির্ণায়ক বলে। কোন নির্ণায়কের সারি বা কলাম সংখ্যাই হবে

এর ক্রমের মান। যে সমস্ত পদ বা রাশি নিয়ে নির্ণায়ক গঠিত তাকে এর উপাদান বলে। যেমন,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

উপাদানগুলোর অনুভূমিক (horizontal) বিন্যাসকে সারি ও উলম্ব

নির্ণায়ক একটি বিশেষ আকারে লিখিত নির্দিষ্ট এক প্রকারের রাশি।

১.২ নির্ণায়কের বিস্তৃতি (Expasion of determinant)ঃ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\left(b_2c_3 - b_3c_2\right) - b_1\left(a_2c_3 - a_3c_2\right) + c_1\left(a_2b_3 - a_3b_2\right)$$

$$= \left(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2\right) - \left(a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1\right)$$

* ১.৩.১ অনুরাশি(Minor)ঃ নির্ণায়কের কোন একটি উপাদানের কলাম ও সারির উপদানগুলো বাদ দিলে বাকি উপদানগুলো দ্বারা গঠিত যে নির্ণায়কটি পাওয়া যায়, তাকে ঐ উপাদানের অনুরাশি বলে।

যেমন, $$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

এই নির্ণায়কে a_1 এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3 - b_3c_2),$

এই নির্ণায়কে b_1 এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_2c_3 - a_3c_2),$

এই নির্ণায়কে c_1 এর অনুরাশি $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)$

*১.৩.২সহগুণক(Co-factor)ঃ একটি নির্ণায়ককে বিস্তৃতি করলে কোন

উপাদানের সহগকে এর সহগুণক বলা হয়।

অন্যভাবে বলা যায় যে, কোন উপদানের অনুরাশির পূর্বে

যথাযোগ্য চিহ্ন বসালে একে উক্ত উপাদানটির সহগুণক বলা হয়।

যেমন, $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

এই নির্ণায়কে a_1 এর সহগুণক $= +\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +(b_2c_3 - b_3c_2)$

b_1 এরসহগুণক $= -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(a_2c_3 - a_3c_2)$

c_1 এর সহগুণক $+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = +(a_2b_3 - a_3b_2)$

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলি

প্রশ্ন ২ ঃ প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

সমাধান ঃ

বামপক্ষ

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}, r_1' = r_1 + r_3$$

$$=(a+b+cp)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \\ b-a & c-b & a+b \end{vmatrix}, \begin{matrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{matrix}$$

$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b & b+c & c^2 \\ -1 & -1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)(-a-b+b+c)$$

$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a), (\mathrm{Pr}\,oved)$$

প্রশ্ন ২ ঃ প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$

সমাধান ঃ

বামপক্ষ

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p-1 & p^2-p & p^2 \\ p^2-1 & p^4-p^2 & p^4 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_1' = c_2 - c_1 \\ c_2' = c_3 - c_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p-1 & p(p-1) & p^2 \\ p^2-1 & p^2(p^2-1) & p^4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} c_1' = c_2 - c_1 \\ c_2' = c_3 - c_2 \end{array}$$

$$= p(p-1)(p^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix}$$

$$= p(p-1)(p^2-1)(p-1)$$

$$= p(p-1)^2(p^2-1), (proved)$$

নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান (Cramer`s Rule) ঃ

প্রশ্ন ৪০ ঃ $x-2y+z=1$

$$2x+y-z=1$$

$$x+y+z=4$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণ হতে x, y ,z এর সহগগুলো দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1(1+1)+2(2+1)+1(2-1)$$

$$=2+6+1$$

$$=9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1+1) + 2(1+4) + 1(1-4)$$

$$= 2 + 10 - 3$$

$$= 9$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1+4) - 1(2+1) + 1(8-1)$$

$$= 5 - 3 + 7$$

$$= 9$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(4-1) + 2(8-1) + 1(2-1)$$

$$= 3 + 14 + 1$$

$$= 18$$

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

$$\therefore x = \frac{9}{9} = 1 \qquad \therefore y = \frac{9}{9} = 1 \qquad \therefore z = \frac{18}{9} = 2$$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান X=1, y=1, z=2 (Ans)

২য় অধ্যায়

ম্যাট্রিক্স (Matrix)

* এই অধ্যায় থেকে আমরা জানতে পারব ঃ

২.০ ম্যাট্রিক্স এর সংজ্ঞা

২.১. ম্যাট্রিক্স এর প্রকারভেদ

২.২. বিপরীত ম্যাট্রিক্স

২.৩. ম্যাট্রিক্স এর গুণ

২.৪ ম্যাট্রিক্সের সাহায্যেএকঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান

২.৫ ম্যাট্রিক্স এর মানাঙ্ক নির্ণয়।

ম্যাট্রিক্স(Matrix) ঃ কিছু নির্দিষ্ট গাণিতিক সংঘটন বা অপারেশন প্রক্রিয়া-
ধীন mn সংখ্যক সংখ্যাকে (কোন সংখ্যা একাধিকবারও থাকতে পারে) যদি তৃতীয় বন্ধনী বা প্রথম বন্ধনী বা দুই জোড়া সমান্তরাল সরল রেখার মধ্যবর্তী স্থানে m সংখ্যক সারি ও n সংখ্যক কলামের আয়তকার আকারে
সাজানো হয়, তবে তাকে mxn (m বাই n) ক্রমের ম্যাট্রিক্স বলে।
m সংখ্যক সারি ও n সংখ্যক কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে নিম্নরূপ-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{n2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{n3} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

২.১ একক ম্যাট্রিক্স (Unit matrix)ঃ যে বর্গাকার ম্যাট্রিক্স এর প্রধান কর্ণের সকল উপাদান একক এবংঅবশিষ্ট সকল উপাদান শূন্য ,তাকে একক ম্যাট্রিক্স বা অভেদ ম্যাটিক্স (Identity matrix). যেমন,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

২.২ ট্রান্সপোজ বা পার্শ্বচর ম্যাট্রিক্স (Transpose matrix)ঃ

কোন ম্যাট্রিক্স এর সারিকে কলামে এবং কলামকে সারিতে বদল করে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া,তাকে আদি ম্যাট্রিক্স এর ট্রান্সপোজ বা পার্শ্বচর ম্যাটিক্স। যেমন,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad \therefore A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

২.৩ ম্যাট্রিক্স এর মানাঙ্ক (Rank of matrix) ঃ কোন ম্যাট্রিক্স এর সর্বোচ্চ সংখ্যক স্বাধীন অশূন্য সারি সংখ্যা বা কলাম সংখ্যাকে ঐ ম্যাট্রিক্স এর মানাঙ্ক বলে। যেমন,

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 3\end{bmatrix}, r_2' = 2r_2 + r_1$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, r_3' = r_3 - r_2$$

Rank of matrix A is 2 (Ans).

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলি

প্রশ্ন ২ ঃ যদি $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ $,B=\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$ হয়, তবে AB ও BA নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ AB= $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0-1+4 & 0+1+0\\1-2+6 & 2+2+0\\2-3+8 & 4+3+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 4\\7 & 7\end{bmatrix}$$

$$=(Ans)$$

BA= $\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}$

BA এর মান বের করা যাবে না। কারণ B এর কলাম সংখ্যা A এর সারি সংখ্যা

প্রশ্ন ১১ ঃ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$ এর অনুবন্ধী এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}$$
$$=1(9-16)-2(3-4)+3(4-3)$$
$$=-7+2+3$$
$$=-2$$

$|A|$ উপাদানগুলির সহগুণক

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}=9-16=-7,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(3-4)=1,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=4-3=1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-(6-12)=6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=(3-3)=0,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-(4-2)=-2$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=(8-9)=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-(4-3)=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3-2=1$$

$|A|$ উপাদানগুলির সহগুণক দ্বারা ম্যাট্রিক্স

$$B=\begin{bmatrix}-7 & 1 & 1\\ 6 & 0 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$|A|$ এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স

$$B^T=\begin{bmatrix}-7 & 6 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}-7 & 6 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-7 & 6 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{2} & -3 & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

(Ans)

* ম্যাট্রিক্স এর সাহায্যে সমাধান কর ঃ

২৮ (ii) $x+y+z=4$

$$2x-y+3z=1$$

$$3x+2y-z=1$$

সমাধান ঃ ম্যাট্রিক্স এর সাহায্যে প্রদত্ত তিনটি সমীকরণকে লেখা যায়

$$AX=L$$

$$\therefore X=A^{-1}L$$

এখানে $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$ এবং $L=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$=1(1-6)-1(-2-9)+1(4+3)$$

$$=-5+11+7$$

$$=13$$

A এর উপাদান গুলো সহগুণক

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 - 6$$
$$= -5$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -(-2-9)$$
$$= 11$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (4+3)$$
$$= 7$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -(-1-2)$$
$$= 3$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1-3)$$
$$= -4$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -(2-3)$$
$$= 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (3+1)$$
$$= 4$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -(3-2)$$
$$= -1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1-2)$$
$$= -3$$

A এর সহগুণক দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 11 & 7 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

A এর অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স =

$$AdjA = B^T = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 11 & -4 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 11 & -4 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}L$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 11 & -4 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -20+3+4 \\ 44-4-1 \\ 28+1-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -13 \\ 39 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

নির্ণেয় সমাধান x= -1, y=3 z= 2

প্রশ্নোত্তর

১. একক ম্যাট্রিক্স কাকে বলে ?

২. বিপরীত ম্যাট্রিক্স কাকে বলে ?

৩. অনুবন্ধী ম্যাট্রিক্স কাকে বলে ?

৪. ম্যাট্রিক্স এর মানাঙ্ক কি ?

** পরবর্তী ক্লাশে ৩য় অধ্যায়- “সূচক ধারা” আলোচনা করবো।

৩য় অধ্যায়

বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ ।

*এই অধ্যায় থেকে আমরা কি কি বিষয় শিখব ঃ

১। বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ ।

২। মূল/ বীজ কি ?

৩। দ্বিঘাত সমীকরণ কি?

৪ । দ্বিঘাত সমীকরণের মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক ।

৬ । দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় নির্ণয় ।

৫। নিশ্চায়ক (Discriminant) এবং মূলের প্রকৃতি ।

৭ । দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় দেয়া থাকলে সমীকরণ গঠন করার পদ্ধতি ।

***২.১ বহুপদী** ঃ আমরা জানি $ax, ax+b, 5x^2+3x+9, 2x^3-bx^2+5x-9$ ইত্যাদিকে যথাক্রমে একপদী, দ্বিপদী , ত্রিপদী, চতুর্থ পদী রাশি বলা হয়। এখানে রাশির পদগুলো (+) চিহ্ন অথবা (−) কিংবা উভয় চিহ্ন দ্বারা সংযোজিত । উপরের প্রত্যকটি রাশিকে সাধারণভাবে বহুপদী রাশি বলা হয়। পদে সংখ্যা অনুযায়ী তাকে একপদী, দ্বিপদী ইত্যাদি নামকরণ করা যেতে পারে। a ও b উভয় ধ্রুবক হলে , রাশিগুলো প্রত্যকটিকে x এর বহুপদী রাশি বলা হয়।

তাহলে

$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+.............+p_n$ একটি বহুপদী রাশি।

$p_0, p_1, p_2, ...p_n$ ধ্রুবক হলে ,এটিকে x এর বহুপদী রাশি সংক্ষেপে বহুপদী বলা হয়। x এর সর্বোচ্চ ঘাত অনুযায়ী বহুপদীর ঘাত নির্ণয় করা হয়।

$p_0 \neq 0$ হলে প্রদত্ত বহুপদীতে x এর সর্বোচ্চ ঘাত n .সুতরাং

$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+.............+p_n$ যেখানে $p_0, p_1, p_2, ...p_n$ ধ্রুবক এবং $p_0 \neq 0$, একটি n ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী। এ বহুপদীকে সাধারণত $f(x), F(x), \varphi(x), \psi(x)$ ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করা হয়।

*২.২.১ বহুপদী সমীকরণ ঃ

মনে করি, $f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + ...+ p_n$

যেখানে $p_0, p_1, p_2..........p_n$ ধ্রুবক এবং $p_0 \neq 0$.

তাহলে, $f(x)=0$ অর্থাৎ $p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + ...+ p_n = 0$

কে একটি বহুপদী বহুপদী সমীকরণ বলা হয়। এ সমীকরণকে সাধারণত n ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণ বলা হয়। n=1,2,3 হলে,সমীকরণটিকে যথাক্রমে সরল (linear),দ্বিঘাত(Quadratic),ত্রিঘাত(Cubic) সমীকরণ নামে অভিহিত করা হয় ।p_0, p_1, p_2 ইত্যাদি কে সমীকরণের বামপক্ষের ১ম,২য়,পদের সহগবলে।

*২.২.২ মূল(Roots) ঃ x এর যে মানগুলোর জন্য বহুপদী সমীকরণটি সিদ্ধ হয় অর্থাৎ বহুপদীর মান শূন্য হয় ঐ মানগুলোকে বহুপদী সমীকরণের মূল(Roots) বলা হয়।

সুতরাং , বহুপদী সমীকরণ $f(x)=0$ এর একটি মূল α_1 হলে, $f(\alpha_1)=0$

*২.৩ দ্বিঘাত সমীকরণের মূল ও সহগের মধ্যে সর্ম্পক ঃ

দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এর মূল দুইটি α ও β হলে প্রদত্ত সমীকরণের দুইটি উৎপাদক $(x-\alpha)$ ও $(x-\beta)$

$$\therefore x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

উভয় পক্ষ হতে x ও ধ্রুবক পদের সহগ সমীকৃত করে

$$-(\alpha+\beta)=\frac{b}{a}$$ এবং $$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)=-\frac{b}{a}$$

$ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের

মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

এবং মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

*২.৪ দ্বিঘাত সমীকরণের মূল নির্ণয় ঃ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0$$

$$\Rightarrow a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = \frac{b^2}{4a} - c$$

$$\Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ca}{4a}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ca}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ca}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ca}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ca}}{2a}$$

সমীকরণের মূলদ্বয় $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ca}}{2a}$ এবং $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ca}}{2a}$

*২.৫ দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি নির্ণয় ঃ

মনে করি $ax^2+bx+c=0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ,
যেখানে $a\neq 0$ এবং a, b, c প্রত্যেকে মূলদ সংখ্যা।
আমরা জানি, প্রদ্বত্ত সমীকরণের মূল দুইটি যথাক্রমে

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ca}}{2a} \quad \text{এবং} \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ca}}{2a}$$

এখন b^2-4ca এর মান পর্যালোচনা করলেই দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দুইটির প্রকৃতি জানতে পারা যায়।

এজন্য b^2-4ca কে সাধারণত প্রদত্ত সমীকরণের নিশ্চায়ক (Discriminant) বলা হয়।

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলের প্রকৃতি ঃ

(i). যদি $b^2 - 4ca = 0$ হয়,তবে মূল দুইটি $\frac{-b}{2a}$ ও $\frac{-b}{2a}$ । অতএব মূল দুইটি পরস্পর সমান, বাস্তব সংখ্যা ও মূলদ হবে।

(ii). $(b^2 - 4ca)$ ধনাত্মক অর্থাৎ $b^2 - 4ca \geq 0$ হলে, $\sqrt{b^2 - 4ca}$ বাস্তব সংখ্যা হবে। মূল দুইটি বাস্তব সংখ্যা ও অসমান হবে।

(iii). $(b^2 - 4ca)$ পূর্ণবর্গ হলে, মূল দুইটি বাস্তব সংখ্যা,মূলদ ও অসমান হবে। যদি $(b^2 - 4ca)$ পূর্ণবর্গ না হয়, তবে মূল দুইটি বাস্তব সংখ্যা, অমূলদ ও অসমান হবে।

(iv). একটি মূল অমূলদ সংখ্যা হলে, অপর মূলটি অনুবন্ধী (Conjugate) অমূলদ সংখ্যা হবে।অর্থাৎ একটি মূল $p+\sqrt{q}$ আকারে হলে, অপর মূলটি হবে $p-\sqrt{q}$

(v). যদি (b^2-4ca) ঋনাত্মক অর্থাৎ $b^2-4ca \leq 0$ হয়, তবে মূল দুইটির উভয়ে জটিল সংখ্যা(Complex number) হবে।একটি মূল $n+ir$ হলে, অপরটি $n-ir$ আকারে হবে।

(vi). প্রদত্ত সমীকরণে c =0 হলে, একটি মূল ০ (শূন্য)।

(vii). প্রদত্ত সমীকরণে b =0 হলে, মূল দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

সংক্ষিপ্ত ২(i) k এর মান কত হলে $(k-1)x^2-(k+2)x+4=0$ সমীকরণের মূলদুটি বাস্তব ও সমান হবে?

সমাধানঃ $(k-1)x^2-(k+2)x+4=0$

সমীকরণের মূলদুটি বাস্তব ও সমান হলে

নিশ্চায়ক $(k+2)^2-4.4(k-1)=0$

$$k^2+4k+4-16k+16=0$$

$$k^2-12k+20=0$$

$$k^2-10k-2k+20=0$$

$$k(k-10)-2(k-10)=0$$

$$(k-10)(k-2)=0$$

$k-10=0$ অথবা $k-2=0$

$k=10$ $\qquad$ $k=2$

সুতরাং নির্ণেয় k এর মান 2 বা 10.

সংক্ষিপ্ত ৪. যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির উল্টার বর্গ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^3+c^3+abc=0$

সমাধানঃ ধরি $ax^2+bx+c=0$

সমীকরণের একটি মূল α

অপর মূল $\frac{1}{\alpha^2}$

সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\frac{1}{\alpha^2}=-\frac{b}{a}....(i)$

মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha.\frac{1}{\alpha^2}=\frac{c}{a}$

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha=\frac{a}{c}$$

(i) সমীকরণে $\alpha=\frac{a}{c}$ বসাই

$$\alpha+\frac{1}{\alpha^2}=-\frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{c}+\frac{c^2}{a^2}=-\frac{b}{a}$$

$$a^3+c^3=-abc$$

$$\therefore a^3+c^3+abc=0$$ (প্রমাণিত)

সংক্ষিপ্ত ৫. যদি $x^2 - 5x + c = 0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হয়, তাহলে c এর মান এবং অপর মূল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $x^2 - 5x + c = 0.....(i)$

সমীকরণের একটি মূল x=4

(i) সমীকরণের x = 4 বসাই

$$4^2 - 5.4 + c = 0$$

$$\therefore c = 4$$

(i) সমীকরণের c = 4 বসাই

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x - x + 4 = 0$$

$$(x-4)(x-1) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$\therefore x = 1$ অথবা $x = 4$

সমীকরণের অপর মূল x=1 এবং c=4 (Ans)

সংক্ষিপ্ত ৯. $x^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের সমষ্টি অন্তরফলের তিনগুণ হলে প্রমাণ কর যে $2b^2=9c$

সমাধান ঃ ধরি $x^2+bx+c=0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\beta=-b$

এবং গুণফল $\alpha\beta=c$

প্রশ্নমতে $\alpha+\beta=3(\alpha-\beta)$

$$(\alpha+\beta)^2=9(\alpha-\beta)^2$$

$$(\alpha+\beta)^2=9\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$$

$$b^2=9b^2-36c$$

$$8b^2=36c$$

$$2b^2=9c$$ (প্রমাণিত)

রচনা ৩. $bx^2+cx+c=0$ সমীকরণের মূলদুটি α ও β হলে দেখাও যে

$$\sqrt{\alpha/\beta}+\sqrt{\beta/\alpha}+\sqrt{c/b}=0$$

সমাধান ঃ ধরি $bx^2+cx+c=0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\beta=-\dfrac{c}{b}$

এবং গুণফল $\alpha\beta=\dfrac{c}{b}$

বামপক্ষ $=\sqrt{\alpha/\beta}+\sqrt{\beta/\alpha}+\sqrt{c/b}$

$$=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}+\sqrt{c/b}$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}+\sqrt{c/b}$$

$$=\frac{-\frac{c}{b}}{\sqrt{c/b}}+\sqrt{c/b}$$

$$=-\sqrt{c/b}+\sqrt{c/b}=0$$ (প্রমাণিত)

$$\frac{-\frac{c}{b}}{\sqrt{\frac{c}{b}}}$$

$$=\frac{-\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{c}{b}}}{\sqrt{\frac{c}{b}}}$$

$$=\sqrt{\frac{c}{b}}$$

রচনা ৫(i). যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি মূল অপরটির বর্গ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^2c+ac^2+b^3=abc$

সমাধানঃ ধরি $ax^2+bx+c=0$

সমীকরণের একটি মূল α

অপর মূল α^2

সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $\alpha+\alpha^2=-\dfrac{b}{a}....(i)$

মূলদ্বয়ের গুণফল $\alpha.\alpha^2=\dfrac{c}{a}$

$$\therefore \alpha^3=\frac{c}{a}$$

(i) সমীকরণকে ঘন করে বসাই

$$(\alpha+\alpha^2)^3=-\frac{b^3}{a^3}$$

$$\alpha^3+3\alpha^3(\alpha+\alpha^2)+(\alpha^3)^2=-\frac{b^3}{a^3}$$

$$\frac{c}{a}-3\frac{bc}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=-\frac{b^3}{a^3}$$

$$a^2c-3abc+bc^2=-b^3$$

$$\therefore a^2c+bc^2+b^3=3abc$$ (প্রমাণিত)

রচনা ১০. $4x^2-6x+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha+\frac{1}{\beta}$ ও $\beta+\frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $4x^2-6x+1=0$

প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $=\alpha+\beta=\frac{6}{4}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $=\alpha\beta=\frac{1}{4}$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha+\frac{1}{\beta}$ ও $\beta+\frac{1}{\alpha}$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $=\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}=\alpha+\beta+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}$

$$=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{6}{4}+\frac{6/4}{1/4}=\frac{3}{2}+6=\frac{15}{2}$$

মূলদ্বয়ের গুণফল $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}$

$$=\frac{1}{4}+2+4=\frac{25}{4}$$

নির্ণেয় সমীকরণ = x^2 -(মূলদ্বয়ের যোগফল)x + মূলদ্বয়ের গুণফল = ০

$$x^2-\frac{15}{2}x+\frac{25}{4}=0$$

$$4x^2-30x+25=0$$ (Ans)

রচনা ৩৮ . $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে, $\alpha+\frac{1}{\beta}$ ও $\beta+\frac{1}{\alpha}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $ax^2+bx+c=0$

সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β

সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয় $\alpha+\frac{1}{\beta}$ ও $\beta+\frac{1}{\alpha}$

নির্ণেয় সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল $=\alpha+\frac{1}{\beta}+\beta+\frac{1}{\alpha}=\alpha+\beta+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}$

$$=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{a}+\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{a}-\frac{b}{c}=-b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=-b\left(\frac{c+a}{ca}\right)$$

মূলদ্বয়ের গুণফল $=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$$=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{c}{a}+2+\frac{a}{c}=\frac{c^2+2ca+a^2}{ca}=\frac{(c+a)^2}{ca}$$

নির্ণেয় সমীকরণ = x^2 -(মূলদ্বয়ের যোগফল)x + মূলদ্বয়ের গুণফল = ০

$$x^2+\frac{b(c+a)}{ca}x+\frac{(c+a)^2}{ca}=0$$

$$cax^2+b(c+a)x+(c+a)^2=0$$ (Ans)

আলোচ্য পাঠ থেকে শিক্ষার্থীরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো সম্পর্কে বিস্তারিত জানতে পারবে এবং গাণিতিক জ্ঞান সমৃদ্ধি হইবে –

১। বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ ।

২। দ্বিঘাত সমীকরণ

২। সমীকরণের মূল/ বীজ

৪। দ্বিঘাত সমীকরণের মূল ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক ।

৬। দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় নির্ণয় ।

৫। নিশ্চায়ক (Discriminant) এবং মূলের প্রকৃতি।

৭। দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় দেয়া থাকলে সমীকরণ গঠন করার পদ্ধতি।

* প্রশ্নোত্তর

* একটি দ্বিঘাত সমীকরণের উদাহরণ দাও।

* একটি 3, -5 মূল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি লেখ।

* দ্বিঘাত সমীকরণের নিশ্চায়ক (Discriminant) লেখ।

* দ্বিঘাত সমীকরণের মূলে প্রকৃতি কিসের ওপর নির্ভর করে।

* $4x^2+2x-1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

* কি শর্তে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে এবং সমান মূল দুটি লেখ ?

* একটি দ্বিঘাত সমীকরণের মূলগুলো কি কি।

** আগামী ক্লাশে আমরা অধ্যায়-৩, ‘‘জটিল সংখ্যা’’ আলোচনা করব

ধন্যবাদ

জটিল সংখ্যা

(Complex Numbers)

৩.১. জটিল সংখ্যার ধারণা ঃ যদি x বাস্তব সংখ্যা হয় তবে $x^2-1=0$ সমাধান করে আমরা পাই x= 1, -1 (1 এবং -1 এর উভয়ে বাস্তব সংখ্যা)।

এখন মনে করি $x^2+1=0$

$x^2+1=0$ থেকে আমরা পাই $x^2=-1$. এমন কোন বাস্তব সংখ্যা নেই যার বর্গ ঋণাত্মক হয়। অর্থাৎ x বাস্তব সংখ্যা হলে, $x^2+1=0$ সমীকরণটির সমাধান করা যায় না। এজন্যই নতুন এক ধরণের সংখ্যার প্রবর্তন করা হয়েছে যেন সমীকরণটির সমাধান করা যায়। ঐ ধরণের সংখ্যাকে বলা হয় জটিল সংখ্যা (Complex Numbers). এজন্য একটি প্রতীক(Symbol), i ব্যবহার করা হয় যেন

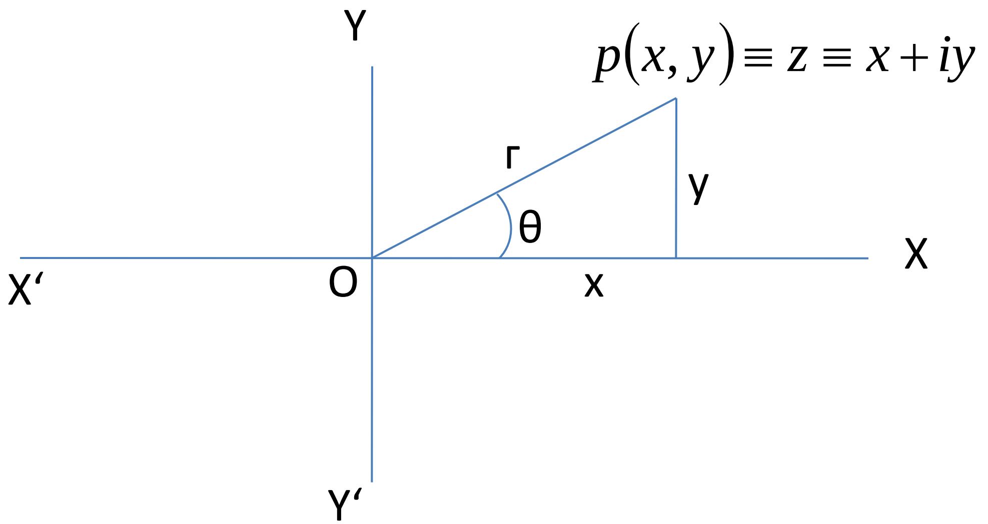
$i^2=-1$, অর্থাৎ $i=\sqrt{-1}$

এখন $i=\sqrt{-1}$ ব্যবহার করে আমরা যে কোন জটিল সংখ্যা লেখতে পারি যেমন, $\sqrt{-4}=\sqrt{(-1)4}=2\sqrt{-1}=2\sqrt{i^2}=2i, \sqrt{-b}=\sqrt{b}i$ ইত্যাদি।

সুতরাং $x^2+1=0$ সমীকরণ করে আমরা পাই $x=\pm\sqrt{-1}$ বা, $x=\pm i$.

জটিল সংখ্যার ঃ a এবং b বাস্তব সংখ্যা হলে, a+ib আকারের সংখ্যাকে বলা হয় জটিল সংখ্যা (Complex Numbers). এখানে a এবং b যথাক্রমে জটিল সংখ্যার বাস্তব(Real) অংশ এবং কাল্পনিক(Imaginary) অংশ।

৩.২. আর্গন্ড চিত্র ঃ জ্যামিতিক পদ্ধতিতে জটিল সংখ্যাকে ব্যাখ্যা করা যায়। এজন্য যে চিত্র ব্যবহার করা হয় তা হল আর্গন্ড চিত্র। নিচে আর্গন্ড চিত্র এঁকে তার বর্ণনা দেওয়া হলঃ



মনে করি, X'OX এবং YOY' আয়ত-কৌণিক অক্ষদ্বয়(Rectangular axes) এবং P একটি বিন্দু যার স্থানাংক (x,y) . এখন X কে বাস্তব অক্ষ এবং Y কে কাল্পনিক অক্ষ ধরা হলে P একটি জটিল সংখ্যা, $x+iy$ সূচিত করবে।

যে জটিল সংখ্যা সম্পূর্নভাবে বাস্তব, তা X অক্ষের উপরস্থ বিন্দু দ্বারা নির্দেশিত হবে। আবার জটিল সংখ্যা সম্পূর্নভাবে কাল্পনিক হলে তা Y অক্ষের উপরস্থ বিন্দু দ্বারা নির্দেশিত হবে। মূলবিন্দু অবশ্যই
০ (শূন্য) নির্দেশ করে।

৩.৩.জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট(Modulus & Argument) ঃ আর্গন্ড চিত্রে যদি OP= r এবং $\angle XOP=\theta$ ধরি, তবে r কে বলা হয় $x+iy\equiv z$ এর মডুলাস এবং লেখা হয় $|z|$. θ কে বলা হয় z এর আর্গুমেন্ট এবং লেখা হয় আর্গ z (arg).

তাহলে $x+iy$ একটি, জটিল সংখ্যা সূচিত করলে মডুলাস $r=\sqrt{x^2+y^2}$ এবং সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট θ= $\tan^{-1}\frac{y}{x}$.

মন্তব্য ঃ আর্গুমেন্ট অর্থাৎ θ কে সাধারণত রেডিয়ানে প্রকাশ করা।

৩.৪. অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা (Conjugate Complex Number) ঃ x+iy এবং x-iy জটিল সংখ্যা দুইটির পার্থক্য কেবল তাদের কাল্পনিক অংশের চিহ্নে। এরুপ দুইটি জটিল সংখ্যাকে অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা বলে।

এখানে x+iy এর অনুবন্ধীকে x-iy দ্বারা সূচিত করা হয়। আবার বিপরীতক্রমে x-iy এর অনুবন্ধীকে x+iy দ্বারা সূচিত করা হয়।

অনুবন্ধী জটিল সংখ্যাদ্বয়কে z ও $\bar{z}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

z=x+iy হলে $\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy$

আবার, z=x-iy হলে $\bar{z}=\overline{x-iy}=x+iy$

৩.৫. জটিল সংখ্যা সমতা ঃ দুইটি জটিল সংখ্যা পরস্পর সমান হবে, যদি এবং কেবল যদি একটি বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ যথাক্রমে অপরটির বাস্তব ও কাল্পনিক অংশের সমান হয়।

মনে করি, a+ib এবং c+id দুইটি জটিল সংখ্যা। আর্গন্ডচিত্রের সমতলের যে বিন্দুর সাথে a+ib সংশ্লিষ্ট, ঐ বিন্দুর স্থানাংক (a,b)। আবার আর্গন্ড চিত্রের সমতলে যে বিন্দুর সাথে c+id সংশ্লিষ্ট ঐ বিন্দুর স্থানাংক (c,d)। তাহলে, a+ib এবং c+id সমান হবে, যদি (a,b) এবং (c,d) দ্বারা একই বিন্দু নির্দেশ করে, অর্থাৎ a=c এবং b=d হয়।

৩.৬. জটিল সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুন ও ভাগ ঃ

জটিল সংখ্যার যোগ	দুইটি জটিল সংখ্যার (a+ib) ও (c+id) হলে (a+ib) +(c+id) = (a+c)+i(b+d)। দুইটি জটিল সংখ্যার যোগফল = এদের বাস্তব অংশের যোগফল +i (এদের কাল্পনিক অংশের যোগফল)।
জটিল সংখ্যার বিয়োগ	দুইটি জটিল সংখ্যার (a+ib) ও (c+id) হলে (a+ib) - (c+id) = (a-c)+i(b-d)। দুইটি জটিল সংখ্যার বিয়োগফল = এদের বাস্তব অংশের বিয়োগফল+i (এদের কাল্পনিক অংশের বিয়োগফল)।
জটিল সংখ্যার গুণফল	(a+ib).(c+id)=ac+iad+ibc+ i^2bd = ac-bd+I(ad+bc)
জটিল সংখ্যার ভাগফল	$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac+ibc-iad-i^2bd}{c^2-i^2d^2}=\frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$

৩.৭. জটিল সংখ্যার বর্গমূল (Square root of Complex Number) ঃ

মনে করি, a+ib বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, জটিল সংখ্যার বর্গমূল একটি জটিল সংখ্যা।

ধরি, $\sqrt{a+ib} = x+iy$ যেখানে x ,y উভয়ে বাস্তব সংখ্যা।

উভয় পক্ষকে বর্গ করে

$$a+ib = x^2 - y^2 + 2ixy$$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে

$$a = x^2 - y^2 ....(i)$$

$$b = 2xy......(ii)$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(x^2-y^2\right)^2 + 4xy = a^2+b^2$$

$$\therefore x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} ......(iii)$$

এখন, (i) ও (ii) হতে আমরা পাই

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(a^2+\sqrt{a^2+b^2}\right) \quad \text{এবং} \quad y^2 = \frac{1}{2}\left(-a^2+\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

(ii) থেকে আমরা বলতে পারি b ধনাত্মক হলে, x ও y একই চিহ্নযুক্ত হবে। ঐক্ষেত্রে

$$\sqrt{a+ib} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{2}} + i\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

b ঋনাত্মক হলে, x ও y বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে। ঐক্ষেত্রে

$$\sqrt{a+ib} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{2}} - i\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

৩.৮. এককের ঘনমূল (Cube Root of Unity) ঃ

মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$

$\therefore x^3 = 1$

বা $x^3 - 1 = 0$

বা $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore x - 1 = 0$

$x = 1$

অথবা $(x^2+x+1) = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}i\right)$$

সুতরাং, এককের ঘনমূল হল $1, \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$ এবং $\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)$

অর্থাৎ, মূলগুলো একটি বাস্তব সংখ্যা এবং অপর দুইটির উভয়ে জটিল সংখ্যা। আবার জটিল সংখ্যা দুইটি পরস্পরের অনুবন্ধী।

এককের ঘনমূলগুলোর বৈশিষ্ট্য (Propeties Cube Root of Unity) ঃ

বৈশিষ্ট্য 1. জটিল মূলদ্বয়ের একটিকে ω দ্বারা সূচিত করা হল। তাহলে, $\omega = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$

$$\omega^2 = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{3}i\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1-2\sqrt{3}i-3\right) = \frac{1}{4}\left(-2-2\sqrt{3}i\right) = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)$$

অনুরূপভাবে, $\omega = \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)$ হলে $\omega^2 == \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}i\right)$

অর্থাৎ, জটিলমূলদ্বয়ের একটি ω হলে অপরটি ω^2 .

সুতরাং এককের ঘনমূলগুলোর মধ্যে জটিল মূলদ্বয়ের একটি হলে অপরটির বর্গের সমান।

বৈশিষ্ট্য 2. মনে করি, ω হল এককের একটি জটিল ঘনমূল। তাহলে, $x^3-1=0$ সমীকরণকে ω সিদ্ধ করবে। অতএব, $\omega^3-1=0$ অর্থাৎ $\omega^3=1$. আবার $\omega^3=1$ বা $\omega.\omega^2=1$

$\therefore \omega=\dfrac{1}{\omega^2}......(i)$ যেহেতু ω এবং ω^2 উভয়ে এককের ঘনমূলগুলোর মধ্যে জটিল মূলদ্বয়,

সুতরাং (i) থেকে বলা যায় জটিল মূলদ্বয়ের একটি অপরটির উল্টা (Reciprocal).

বৈশিষ্ট্য 3. যেহেতু, $x^2+x+1=0$ সমীকরণের একটি মূল ω. $\therefore \omega^2+\omega+1=0$ ...(ii).

যেহেতু এককের ঘনমূলগুলো 1, ω , ω^2 দ্বারা সূচিত করা হয়েছে, সুতরাং (ii) থেকে বলতে পারি এককের ঘনমূলগুলো সমষ্টি শূন্য।

৩.৯. জটিল সংখ্যার ধর্মাবলি (Properties of Complex Number)ঃ

ক. যদি a+ib=0 হয়, তবে a=0 , b=0

খ. যদি a+ib=c+id হয়, তবে a=c , b=d

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলি

প্রশ্ন ২ ঃ পরমমান এবং আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর (ii) 3-5i

সমা ঃ 3-5i এর পরমমান $|3-5i| = \sqrt{3^2+(-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}\,(Ans)$

3-5i এর আর্গুমেন্ট $\tan\theta = \frac{3}{-5} \therefore \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)(Ans)$

প্রশ্ন ৩ ঃ বর্গমূল নির্ণয় কর (ii) 2i ,(iii) i , (viii) 3+4i

সমা (ii) ঃ 2i এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{2i} = \pm\sqrt{1^2+2i+i^2} = \pm\sqrt{(1+i)^2} = \pm(1+i),(Ans)$

সমা(iii) ঃ i এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{i} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}2i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1^2+2i+i^2)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+i)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),(Ans)$

সমা(viii) ঃ 3+4i এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{3+4i} = \pm\sqrt{2^2+2.2.i+i^2} = \pm\sqrt{(2+i)^2} = \pm(2+i),(Ans)$

প্রশ্ন ৫ ঃ মান নির্ণয় কর (iv) $\sqrt[4]{-64}$

সমা (iv) ধরি, $x = \sqrt[4]{-64} \Rightarrow x^4 = -64 \Rightarrow x^4+64=0 \Rightarrow (x^2)^2-(8i)^2 = 0 \Rightarrow (x^2-8i)(x^2+8i) = 0$

$\therefore x^2-8i=0$ অথবা $\therefore x^2+8i=0$

$\therefore x^2-8i=0$	$\therefore x^2+8i=0$
$x^2 = 8i$	$x^2 = -8i$
$\therefore x = \pm\sqrt{8i}$	$\therefore x = \pm\sqrt{-8i}$
$x = \pm2\sqrt{2i} \Rightarrow x = \pm2\sqrt{1^2+2i+i^2}$	$x = \pm2\sqrt{-2i} \Rightarrow x = \pm2\sqrt{1^2-2i+i^2}$
$\therefore x = \pm2(1+i)$	$\therefore x = \pm2(1-i)$

$\therefore x = \pm2(1\pm i),(Ans)$

প্রশ্ন ৯ঃ এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলেপ্রমাণ কর যে(iii) $(x+y)^2+(x\omega+y\omega^2)^2+(x\omega^2+y\omega)^2=6xy$

সমা (iii) ঃ L.H.S $=(x+y)^2+(x\omega+y\omega^2)^2+(x\omega^2+y\omega)^2$

$$=x^2+2xy+y^2+x^2\omega^2+2xy\omega^3+\omega^4y^2+x^2\omega^4+2xy\omega^3+\omega^2y^2$$

$$=x^2+2xy+y^2+x^2\omega^2+2xy+\omega y^2+x^2\omega+2xy+\omega^2y^2$$

$$=6xy+x^2(1+\omega+\omega^2)+y^2(1+\omega+\omega^2)$$

$$=6xy+0+0$$

$$=6xy$$

$$=R.H.S_{(\text{Proved})}$$

প্রশ্ন ১০ ঃ যদি $\sqrt[3]{x+iy}=p+iq$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\sqrt[3]{x-iy}=p-iq$

সমা (iii) ঃ $\therefore \sqrt[3]{x+iy}=p+iq$

$$x+iy=p^3+3ip^2q-3pq^2-iq^3$$

$$x+iy=(p^3-3pq^2)+i(3p^2q-q^3)$$

উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে

$x=(p^3-3pq^2)$ এবং $y=(3p^2q-q^3)$

এখন, $x-iy=(p^3-3pq^2)-i(3p^2q-q^3)$

$$x-iy=p^3-3ip^2q+3p(iq)^2-(iq)^3$$

$$x-iy=(p-iq)^3$$

$$\sqrt[3]{x-iy}=p-iq_{(\text{Proved})}$$

অধ্যায় -৫

বিন্যাস

(Permutation)

৪.১ বিন্যাস ঃ কতগুলো জিনিস থেকে কয়েকটি বা সব কয়টি একবারে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় (অর্থাৎ ভিন্ন ভিন্ন সারি গঠন করা যায়) তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি বিন্যাস বলা হয়।

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেক বার r $(r \le n)$ সংখ্যক জিনিস নিয়ে প্রাপ্ত বিন্যাস সংখ্যাকে সাধারণত সংক্ষেপে $_{n}p_{r}$ $^{n}p_{r}$ বা $p_{(n,r)}$ বা দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $p_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$

৪.২ বিন্যাস ঃ মনে করি, n সংখ্যক জিনিসের মধ্যে p সংখ্যক এক রকমের, q সংখ্যক দ্বিতীয় রকমের, r সংখ্যক তৃতীয় রকমের এবং বাকি জিনিসগুলো ভিন্ন ভিন্ন হলে নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}}$$

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলি

প্রশ্ন ৬ ঃ স্বরবর্ণগুলোকে (i) একত্রে রেখে (ii) পাশাপাশি না রেখে FAILURE শব্দের অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমা ঃ FAILURE শব্দটিতে মোট 7 টি অক্ষর আছে। এ অক্ষরগুলো সবই ভিন্ন ভিন্ন।
সুতরাং সবগুলো অক্ষর একবারে নিয়ে 7 টি অক্ষরকে সাজানোর উপায় = $^7p_7 = \underline{|7} = 5040$.

এখন স্বরবর্ণ AIUE কে একক অক্ষর ধরে F,L,R, (AIUE) অর্থাৎ 4 টি অক্ষরের সবগুলো অক্ষর একবারে নিয়ে অক্ষরকে সাজানোর উপায় = $^4p_4 = \underline{|4} = 24$. AIUE স্বরবর্ণ 4 টি নিজেদের মধ্যে সাজানোর উপায় = $^4p_4 = \underline{|4} = 24$

(i) স্বরবর্ণ গুলোকে একত্রে রেখে অক্ষরগুলোকে সাজানোর উপায় = $24 \times 24 = 576.$ (Ans)

(ii) স্বরবর্ণ গুলোকে পাশাপাশি না রেখে অক্ষরগুলোকে সাজানোর উপায় = 5040 – 576 = 4464

(Ans)

প্রশ্ন ১৮ ঃ 6, 5, 3, 2, 0 অঙ্কগুলো দ্বারা পাঁচ অঙ্কের কতগুলো সার্থক বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায় তা নির্ণয় কর।

সমা ঃ 6, 5, 3, 2, 0 অঙ্কগুলো দ্বারা পাঁচ অঙ্কের সার্থক বিজোড় সংখ্যা গঠন করতে হলে এককের

ঘরে একবার 3 কে এবং আরেকবার 5 কে নির্দিষ্ট রাখতে হবে।

এককের ঘরে 5 কে নির্দিষ্ট রেখে অবশিষ্ট 4 টি অঙ্ক 6, 3, 2, 0 কে সাজিয়ে সংখ্যা গঠনের উপায় $={}^4p_4 = \underline{|4} = 24.$

অযুতের ঘরে 0 কে নির্দিষ্ট রেখে এবং এককের ঘরে 5 কে নির্দিষ্ট রেখে অবশিষ্ট 3 টি অঙ্ক 6, 3, 2, কে সাজিয়ে সংখ্যা গঠনের উপায় $={}^3p_3 = \underline{|3} = 6.$

কিন্তু এই 6 টি সংখ্যা প্রকৃত পক্ষে 4 টি অঙ্ক বিশিষ্ট।

সুতরাং এককের ঘরে 5 কে নির্দিষ্ট রেখে পাঁচ অঙ্কের সার্থক বিজোড় সংখ্যা = 24 - 6 = 18

অনুরুপভাবে এককের ঘরে 3 কে নির্দিষ্ট রেখে পাঁচ অঙ্কের সার্থক বিজোড় সংখ্যা = 24 - 6 = 18

সুতরাং 6, 5, 3, 2, 0 অঙ্কগুলো দ্বারা পাঁচ অঙ্কের সার্থক বিজোড় সংখ্যা = 18 + 18 = 36

(Ans)

প্রশ্ন ৬ ঃ স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি না রেখে Polytechnic শব্দের অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর।

সমা ঃ Polytechnic শব্দটিতে মোট 11 টি অক্ষর/বর্ণ আছে। যার মধ্যে স্বরবর্ণ আছে 3 টি এবং

ব্যঞ্জনবর্ণ আছে 4 টি উহার মধ্যে C আছে 2 টি ।

স্বরবর্ণ 3 টিকে একটি বর্ণ মনে করলে মোট বর্ণ হয় = 11- 3 +1= 9 টি ।

9 টি বর্ণ কে সাজানো সংখ্যা (যার মধ্যে C আছে 2 টি) = $\frac{|\underline{9}}{|\underline{2}} = \frac{362880}{2} = 181440$

আবার স্বরবর্ণ 3 টিকে নিজেদের মধ্যে সাজানো সংখ্যা $= 3p_3 = |\underline{3} = 1.2.3 = 6$

স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি রেখে বর্ণগুলোকে সাজানো সংখ্যা = 181440×6 =1088640

আবার 11 টি বর্ণ সবগুলোকে একত্রে নিয়ে সাজানো সংখ্যা (যার মধ্যে C আছে 2 টি)=$\frac{|\underline{11}}{|\underline{2}}$

$$= \frac{39916800}{2}$$

$$= 19958400$$

স্বরবর্ণগুলোকে পাশাপাশি না রেখে শব্দটি বর্ণগুলোকে সাজানো সংখ্যা=19958400 -1088640

= 188697600

(Ans)

অধ্যায় - ৬

সমাবেশ

(Combination)

* এই অধ্যায় থেকে আমরা জানতে পারব ঃ

ক. সমাবেশ এর সংজ্ঞা

খ. সমাবেশ এর ব্যরহার

গ. সমাবেশ এর সমস্যা ও সমাধান

৫.১ সমাবেশ ঃ কতগুলো জিনিস থেকে কয়েকটি বা সবকয়টি একবারে নিয়ে যত প্রকারে নির্বাচন বা দল (ক্রম বর্জন করে) গঠন করা করা যায় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলা হয়।

৫.২ সমাবেশের সংখ্যা ঃ সবগুলো জিনিস ভিন্ন ভিন্ন হলে অর্থাৎ n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = $^{n}c_{r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$

(যেখানে হলে n এবং r উভয়ে ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $r \leq n$)

৫.৩.১ প্রমাণ কর যে, $^{n}c_r = {}^{n}c_{n-r}$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, $^{n}c_r = \dfrac{|\underline{n}}{|\underline{r}\,|\underline{n-r}}$

$$\therefore {}^{n}c_{n-r} = \frac{|\underline{n}}{|\underline{n-r}\,|\underline{n-n+r}} = \frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\,|\underline{n-r}} = {}^{n}c_r$$ (প্রমাণিত)

৫.৪.২ প্রমাণ কর যে, $^{n}c_r + {}^{n}c_{n-1} = {}^{n+1}c_r$

প্রমাণ = $$^{n}c_r + {}^{n}c_{n-1} = \frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\,|\underline{n-r}} + \frac{|\underline{n}}{|\underline{r-1}\,|\underline{n-r+1}}$$

$$= \frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\,|\underline{n-r}} + \frac{|\underline{n}}{|\underline{r-1}\,|\underline{n-r+1}} = \frac{|\underline{n}}{r|\underline{r-1}\,|\underline{n-r}} + \frac{|\underline{n}}{|\underline{r-1}(n+1-r)|\underline{n-r}}$$

$$= \frac{|\underline{n}}{|\underline{r-1}\,|\underline{n-r}}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n+1-r}\right\} = \frac{|\underline{n}}{|\underline{r-1}\,|\underline{n-r}}\left\{\frac{n+1-r+r}{r(n+1-r)}\right\}$$

$$= \frac{(n+1)|\underline{n}}{r|\underline{r-1}(n+1-r)|\underline{n-r}}$$

$$= \frac{|\underline{n+1}}{|\underline{r}\,|\underline{n+1-r}}, (\mathrm{Pr}\,oved)$$

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলি

প্রশ্ন ৯ ঃ 15 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জন বোলার এবং 3 জন উইকেট রক্ষক। কমপক্ষে 4 জন বোলার এবং 2 জন উইকেট রক্ষক নিয়ে কত প্রকারে 11 জনের একটি ক্রিকেট দল গঠন করা যায়।

সমাধান ঃ

দল গঠন	বোলার(5)	উইকেট(3)	অন্যান্য(7)	দল সংখ্যা
a	5	3	3	${}^5c_5\times{}^3c_3\times{}^7c_3$ $=1\times1\times35=35$
b	5	2	4	${}^5c_5\times{}^3c_2\times{}^7c_4$ $=1\times3\times35=105$
c	4	2	5	${}^5c_4\times{}^3c_2\times{}^7c_5$ $=5\times3\times21=315$
d	4	3	4	${}^5c_4\times{}^3c_3\times{}^7c_4$ $=5\times1\times35=175$
মোট দল গঠনের সংখ্যা				35+105+315+175 = 630 (Ans)

প্রশ্ন ৭ ঃ 7 জন ছাত্র ও 4 জন ছাত্রী হতে 5 জনের একটি কমিটি কত উপায়ে গঠন করা যায় যাতে কমপক্ষে একজন ছাত্রী কমিটিতে থাকবে ।

সমাধান ঃ

কমি গঠনের উপায়	ছাত্র(7)	ছাত্রী(4)	কমিটির সংখ্যা
a	4	1	${}^7c_4 \times {}^4c_1 = 35 \times 4$ $= 140$
b	3	2	${}^7c_3 \times {}^4c_2 = 35 \times 6$ $= 210$
c	2	3	${}^7c_2 \times {}^4c_3 = 21 \times 4$ $= 84$
d	1	4	${}^7c_1 \times {}^4c_4 = 7 \times 1$ $= 7$
		মোট কমিটির সংখ্যা =	140 + 210 + 84+7 = 441 (Ans)

প্রশ্ন ১৫ ঃ 6 জন বিজ্ঞান বিভাগ ও 4 জন কলা বিভাগের ছাত্র হতে 5 জনের একটি কমিটি করতে হবে। প্রত্যেক ক্ষেত্রে বিজ্ঞানের ছাত্রদের সংখ্যাগরিষ্ঠতা দিয়ে কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যাবে?

সমাধান ঃ

কমি গঠনের উপায়	বিজ্ঞানের ছাত্র(6)	কলাছাত্র(4)	কমিটির সংখ্যা
a	4	2	${}^6c_4 \times {}^4c_2 = 15 \times 6$ $= 90$
b	5	1	${}^6c_5 \times {}^4c_1 = 6 \times 4$ $= 24$
c	6	0	${}^6c_6 \times {}^4c_0 = 1 \times 1$ $= 1$
		মোট কমিটির সংখ্যা =	90 + 24 + 1 = 115 (Ans)

আলোচ্য পাঠ থেকে শিক্ষার্থীরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো সম্পর্কে বিস্তারিত জানতে পারবে -

১। সমাবেশ, সমাবেশের সংখ্যা নির্ণয় এবং কমিটি গঠনের উপায় ।

২। বিন্যাস ও সমাবেশের মধ্যে পার্থক্য, ইত্যাদি।

প্রশ্নোত্তর

ক. সমাবেশ কি ?

খ. ${}^nP_r$ ও ${}^nC_r$ এর সম্পর্ক নির্ণয় কর।

গ. ${}^nC_{10} = {}^nC_{20}$ হলে ${}^nC_2$ এর মান কত?

ধন্যবাদ

৭ম অধ্যায়

সংযুক্ত কোণের ধারণা

(Concept of Associated Angles

৪ । সমাধান কর ঃ (যখন $0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$)

(i) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

সমাধান ঃ$2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

$$2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta = 0$$

$$2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$$

$$2\cos^2\theta - 4\cos\theta + \cos\theta - 2 = 0$$

$$2\cos\theta(\cos\theta - 2) + (\cos\theta - 2) = 0$$

$$(\cos\theta - 2)(2\cos\theta + 1) = 0$$

$$but, (\cos\theta - 2) \neq 0$$

$$\therefore (2\cos\theta + 1) = 0$$

$$2\cos\theta = -1$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = -\cos 60^0$$

$$\cos\theta = \cos(180^0 - 60^0)$$

$$\cos\theta = \cos 120^0$$

$$\therefore \theta = 120^0$$

$$\cos\theta = \cos(180^0 + 60^0)$$

$$\cos\theta = \cos 240^0$$

$$\therefore \theta = 240^0$$

অতএব $\theta = 120^\circ, 240^\circ$

(vi) $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{3}$

সমাধান ঃ $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{3}$

$$\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos\theta=\sin\theta$$

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos\theta\right)^2=\sin^2\theta$$

$$3-2.\sqrt{3}.\sqrt{3}\cos\theta+3\cos^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$4\cos^2\theta-6\cos\theta+2=0$$

$$4\cos^2\theta-4\cos\theta-2\cos\theta+2=0$$

$$4\cos\theta(\cos\theta-1)-2(\cos\theta-1)=0$$

$$(\cos\theta-1)(4\cos\theta-2)=0$$

$$\therefore \cos\theta-1=0$$

$$\cos\theta=1=\cos 0^0$$

$$\theta=0^0$$

Again

$$\cos\theta=\cos 0^0=\cos\left(360^0+0^0\right)$$

$$\cos\theta=\cos 360^0$$

$$\therefore \theta=360^0$$

$$4\cos\theta-2=0$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}=\cos 60^0$$

$$\theta=60^0$$

Again

$$\cos\theta=\cos 60^0=\cos\left(360^0-60^0\right)$$

$$\cos\theta=\cos 300^0$$

$$\therefore \theta=300^0$$

অতএব $\theta=0^\circ, 60^\circ, 300^\circ, 360^\circ$

(vi) $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

সমাধান ঃ $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} + \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

৫। মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}$

সমাধান ঃ $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}$

$$=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)+\sin^2\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}$$

$$=2\left(\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=2\times1$$

$$=2(Ans)$$

(ii) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

সমাধান ঃ $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

$$=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}$$

$$=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=2\times1=2$$

$$=(Ans)$$

(iii) $\sin^2\frac{17\pi}{18}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{37\pi}{18}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$

সমাধান ঃ $\sin^2\frac{17\pi}{18}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{37\pi}{18}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$$=\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{18}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(2\pi+\frac{\pi}{18}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\sin^2\frac{\pi}{18}+\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{18}+\sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$=\left(\sin^2\frac{\pi}{18}+\cos^2\frac{\pi}{18}\right)+\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=1+1$$

$$=2(Ans)$$

৬। যদি $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋনাত্মক হয়, তবে $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$ এর মান কত ?

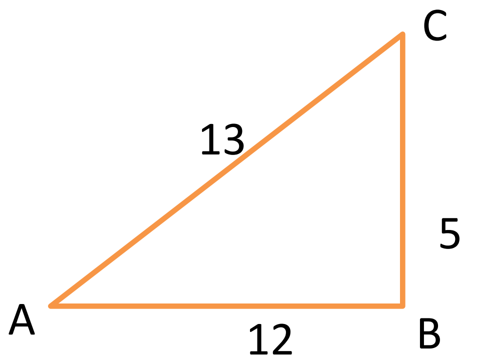
সমাধান ঃ

$$\because \tan\theta = \frac{5}{12}$$

$$\therefore Sin\theta = -\frac{5}{13}$$

$$\cos\theta = -\frac{12}{13}$$

$$\sec\theta = -\frac{13}{12}$$



$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 12^2 + 5^2$$

$$AC = \sqrt{169}$$

$$AC = 13$$

now

$$\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \frac{-\frac{5}{13} - \frac{12}{13}}{-\frac{13}{12} + \frac{5}{12}}$$

$$= \frac{-\frac{17}{13}}{-\frac{8}{12}}$$

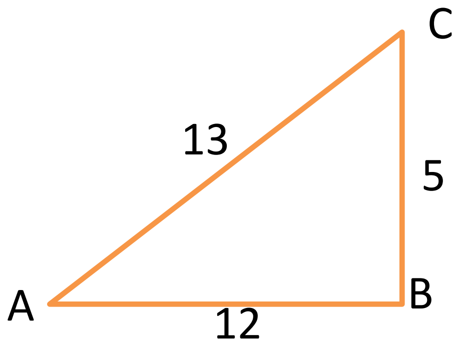
$$= \frac{17}{13} \times \frac{12}{8}$$

$$= \frac{51}{26}$$

$$= (Ans)$$

৮। যদি $\sin\theta = \frac{5}{13}$ এবং $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ হয়, তবে $\frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \operatorname{cosec}(-\theta)} = \frac{3}{10}$

সমাধান ঃ $\because \sin\theta = \frac{5}{13}$



$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

$13^2 = AB^2 + 5^2$

$AB = \sqrt{169 - 25}$

$AB = \sqrt{144}$

$\therefore AB = 12$

$\therefore \tan\theta = -\frac{5}{12}$

$\cot\theta = -\frac{12}{5}$

$\sec\theta = -\frac{13}{12}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

$$L.H.S = \frac{\tan\theta + \sec(-\theta)}{\cot\theta + \operatorname{cosec}(-\theta)}$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta}$$

$$= \frac{-\frac{5}{12} - \frac{13}{12}}{-\frac{12}{5} - \frac{13}{5}}$$

$$= \frac{-\frac{18}{12}}{-\frac{25}{5}}$$

$$= \frac{18}{12} \times -\frac{5}{25}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$$= R.H.S$$

$$= (\text{Proved})$$

১৩ম অধ্যায়

দৈর্ঘ্য এবং ক্ষেত্রফলের স্থানাংক

(Co-ordinates of lengths and Area)

৮.৫ ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দুর প্রেক্ষিতে এর ক্ষেত্রফল ঃ

ABC ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দু বিন্দু তিনটির স্থানাংক $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ হলে

$$\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ তিনটি বিন্দু একই সরল রেখায় অবস্থিত হলে $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

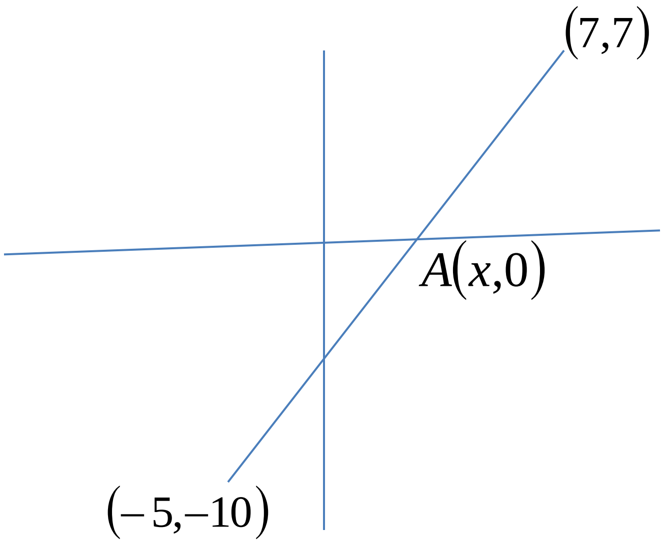
\# মূলবিন্দুর স্থানাংক $O(0,0)$

\# X অক্ষের উপর যে কোন বিন্দুর কোটি শূন্য অথাৎ Y=0

\# Y অক্ষের উপর যে কোন বিন্দুর ভূজ শূন্য অথাৎ X=0

প্রশ্ন ঃ $(7,7)$ এবং $(-5,-10)$ বিন্দু দুটির সংযোগ রেখাকে X অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর এবং বিভক্ত বিন্দুর ভূজ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $(7,7)$ এবং $(-5,-10)$ বিন্দু দুটির সংযোগ রেখাকে X অক্ষ $A(x,0)$ বিন্দুতে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।



$$\therefore x=\frac{k.(-5)+1.7}{k+1}$$

$$x=\frac{-5k+7}{k+1}.......(i)$$

এবং

$$0=\frac{k.(-10)+1.7}{k+1}$$

$$0=\frac{-10k+7}{k+1}$$

$$0=-10k+7$$

$$10k=7$$

$$k=\frac{7}{10}$$

$$k:1=7:10$$

(i) সমীকরণে $k=\frac{7}{10}$, বসাই

$$x=\frac{-5.\frac{7}{10}+7}{\frac{7}{10}+1}$$

$$x=\frac{-35+70}{7+10}$$

$$x=\frac{35}{17}$$

প্রশ্ন ঃ একটি বিন্দুর কোটি ভূজের দ্বিগুণ, যদি এর দূরত্ব $(4,3)$ হতে $\sqrt{10}$ একক হয়, তবে বিন্দুটির স্থানাংক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, বিন্দুটির ভূজ α ।

$\therefore$ বিন্দুটির কোটি 2α

তাহলে বিন্দুটি $(\alpha,2\alpha)$

$(4,3)$ বিন্দু হতে $(\alpha,2\alpha)$ বিন্দুর দূরত্ব $=\sqrt{(\alpha-4)^2+(2\alpha-3)^2}$

শর্তে, $\sqrt{(\alpha-4)^2+(2\alpha-3)^2}=\sqrt{10}$

$$\alpha^2-8\alpha+16+4\alpha^2-12\alpha+9=10$$
$$5\alpha^2-20\alpha+15=0$$
$$\alpha^2-4\alpha+3=0$$
$$\alpha^2-3\alpha-\alpha+3=0$$
$$\alpha(\alpha-3)-(\alpha-3)=0$$
$$(\alpha-3)(\alpha-1)=0$$

$\therefore(\alpha-3)=0$ অথবা $(\alpha-1)=0$

$\therefore\alpha=3$ $\qquad$ $\alpha=1$

যখন $\alpha=1$ তখন বিন্দুটি $(1,2)$

যখন $\alpha=3$ তখন বিন্দুটি $(3,6)$

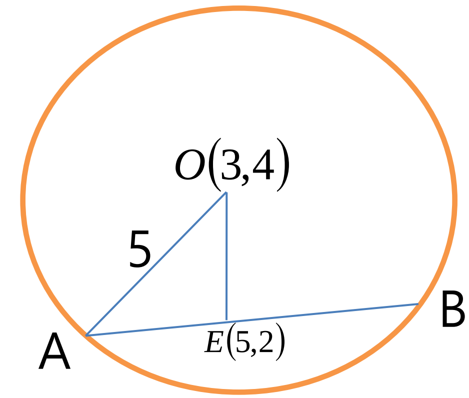
অতএব নির্ণেয় বিন্দুটির স্থানাংক $(1,2)$ অথবা $(3,6)$

প্রশ্ন ঃ একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাংক $(3,4)$ এর যে জ্যা $(5,2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5

কেন্দ্রের স্থানাংক $(3,4)$

এবং AB জ্যা $E(5,2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়।



AB জ্যা এর দৈর্ঘ্য = ?

কেন্দ্র $O(3,4)$ হতে $E(5,2)$ বিন্দুর দূরত্ব

$$OE = \sqrt{(5-3)^2 + (2-4)^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{4+4}$$
$$= \sqrt{8}$$

AOE সমকোণী ত্রিভূজ হতে

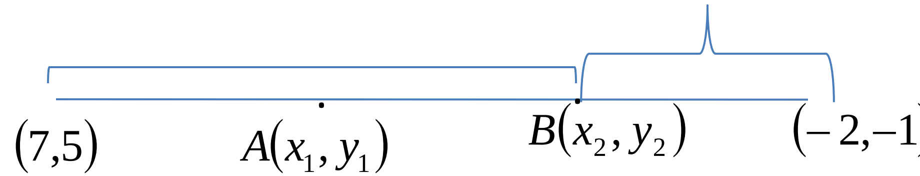
$$AE^2 + OE^2 = OA^2$$
$$AE^2 + (\sqrt{8})^2 = 5^2$$
$$AE^2 = 25 - 8$$
$$AE = \sqrt{17}$$

AB জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{17}$

$= (Ans)$

১৫। $(7,5)$ এবং $(-2,-1)$ বিন্দুটির সংযোগ রেখার সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $(7,5)$ এবং $(-2,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা $A(x_1,y_1)$ ও $B(x_2,y_2)$ বিন্দুতে সমত্রিখন্ডিত হয়।



অতএব $(7,5)$ এবং $(-2,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা $B(x_2,y_2)$ বিন্দুতে $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

$$\therefore x_2=\frac{2.(-2)+1.7}{2+1}=\frac{-4+7}{3}=\frac{3}{3}=1$$

$$\therefore y_2=\frac{2.(-1)+1.5}{2+1}=\frac{-2+5}{3}=\frac{3}{3}=1$$

অতএব সমত্রিখন্ডকের একটি বিন্দু $B(1,1)$

আবার $(7,5)$ এবং $(-2,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা $A(x_1,y_1)$ বিন্দুতে $1:2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

$$\therefore x_1=\frac{1.(-2)+2.7}{1+2}=\frac{-2+14}{3}=\frac{12}{3}=4$$

$$\therefore y_1=\frac{1.(-1)+2.5}{1+2}=\frac{-1+10}{3}=\frac{9}{3}=3$$

অতএব সমত্রিখন্ডকের অপর বিন্দু $A(4,3)$

২৯। যদি a+b+c=0 হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে (a^2,bc) ,(b^2,ca) ও (c^2,ab) বিন্দু তিনটি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত হবে $a\neq b\neq c$ ।

সমাধান ঃ (a^2,bc) ,(b^2,ca) ও (c^2,ab) বিন্দু তিনটি একই সরল রেখার উপর অবস্থিত হলে

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & 1 \\ b^2 & ca & 1 \\ c^2 & ab & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a^2-b^2 & -c(a-b) & 0 \\ b^2-c^2 & -a(b-c) & 0 \\ c^2 & ab & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{matrix} r_1' = r_1 - r_2 \\ r_2' = r_2 - r_3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b & -c & 0 \\ b+c & -a & 0 \\ c^2 & ab & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)(b-c)\left(-a^2-ab+bc+c^2\right)=0$$

$$\Rightarrow (a-b)(b-c)\left\{\left(c^2-a^2\right)+b(c-a)\right\}=0$$

$$\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a)\{c+a+b\}=0$$

$$but,(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$$

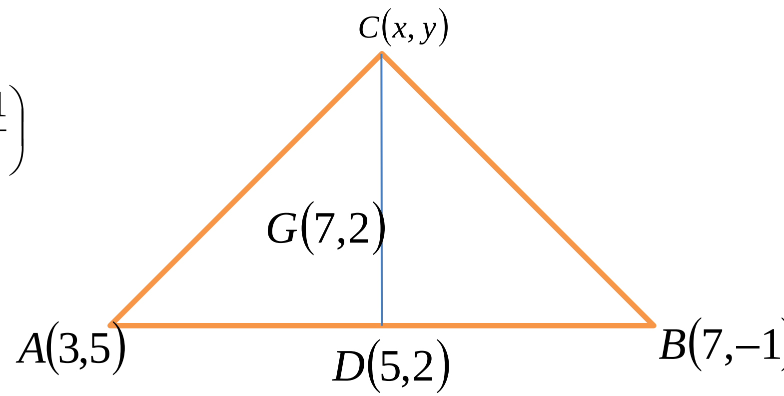
$$\therefore a+b+c=0$$

৩১। ΔABC এর ভরকেন্দ্রের স্থানাংক $(7,2)$, A ও B শীর্ষবিন্দু দুটির স্থানাংক যথাক্রমে $(3,5)$ ও $(7,-1)$ হলে, C বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, C বিন্দুর স্থানাংক (x, y)

A ও B বিন্দু দুটির মধ্য বিন্দুর স্থানাংক $D\left(\frac{3+7}{2}, \frac{5-1}{2}\right)$

$D(5,2)$



$C(x, y)$ ও $D(5,2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা CD মধ্যমাকে ভরকেন্দ্র $G(7,2)$ বিন্দুতে $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

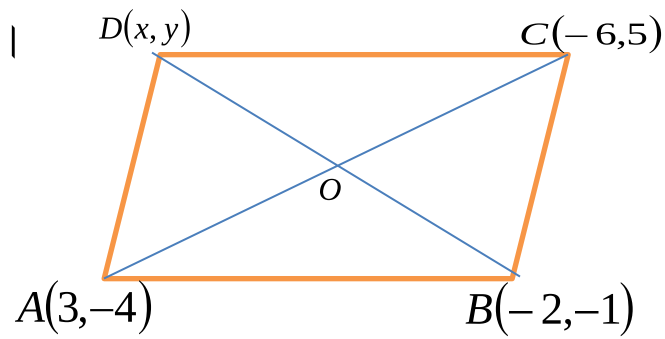
$$\therefore 7 = \frac{2.5 + 1.x}{2+1} = \frac{10+x}{3}$$
$$\Rightarrow 10 + x = 21$$
$$x = 11$$

$$2 = \frac{2.2 + 1.y}{2+1} = \frac{4+y}{3}$$
$$\Rightarrow 4 + y = 6$$
$$y = 2$$

সুতরাং C বিন্দুর স্থানাংক $(11,2)$

৩১। কোন সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্ত বিন্দু দুটির স্থানাংক $(3,-4)$ এবং $(-6,5)$ । এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দু স্থানাংক $(-2,-1)$ হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, চতুর্থ শীর্ষ বিন্দু D বিন্দুর স্থানাংক (x, y) ।



AC কর্ণের মধ্য বিন্দু $O\left(\frac{3-6}{2}, \frac{-4+5}{2}\right)$

$O\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

BD কর্ণের মধ্য বিন্দু $O\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y-1}{2}\right)$

শর্তে

$$\frac{x-2}{2} = -\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow x-2 = -3$$
$$\therefore x = -1$$

$$\frac{y-1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow y-1 = 1$$
$$\therefore y = 2$$

চতুর্থ শীর্ষ বিন্দু D এর স্থানাংক $(-1,2)$ ।

ABC ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল =

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{3(-1-5)+4(-2+6)+1(-10-6)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{-18+16-16\}$$

$$= \frac{1}{2}\times(-18)$$

$$= -9$$

ABC ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল = 9

ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = $2\times \Delta ABC = 2\times 9 = 18$

৪৩। একটি ত্রিভূজের বিন্দুগুলো স্থানাংক যথাক্রমে $A(5,6), B(-9,1)$ ও $C(-3,-1)$। ত্রিভূজটির ক্ষেত্রফল বের কর এবং A হতে BC বাহুর উপর লম্বের পরিমান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

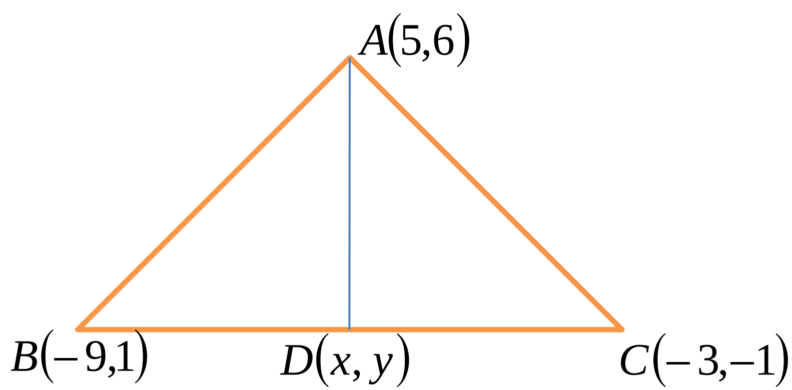
ABC ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ -9 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\{5(1+1) - 6(-9+3) + 1(9+3)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{10 + 36 + 12\}$$

$$= \frac{1}{2} \times (58)$$

$$= 29$$



BC বাহুর দৈর্ঘ্য = $\sqrt{(-9+3)^2 + (1+1)^2}$

$$= \sqrt{36+4}$$

$$= 2\sqrt{10}$$

আবার ABC ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা

$$29 = \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

$$29 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times AD$$

$$AD = \frac{29}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore AD = \frac{29\sqrt{10}}{10}$$

৪৩। একটি ত্রিভূজের শীর্ষ বিন্দুগুলো স্থানাংক যথাক্রমে $A(t+2,1), B(2t+1,3),$ ও $C(3t+2,2t+1)$ । ত্রিভূজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, t=0 অথবা t=3 হলে বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে।

সমাধান ঃ

ABC ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} t+2 & 1 & 1 \\ 2t+1 & 3 & 1 \\ 3t+2 & 2t+1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} t-1 & 2 & 0 \\ t+1 & 2(t-1) & 0 \\ 3t+2 & 2t+1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1' = r_2 - r_1 \\ r_2' = r_3 - r_2 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{2t^2 - 4t + 2 - 2t - 2\}$$

$$= t(t-3)$$

বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, ABC ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল শূন্য

অর্থাৎ t(t-3)=0

$\therefore$ t=0 অথবা t-3=0

t = 3

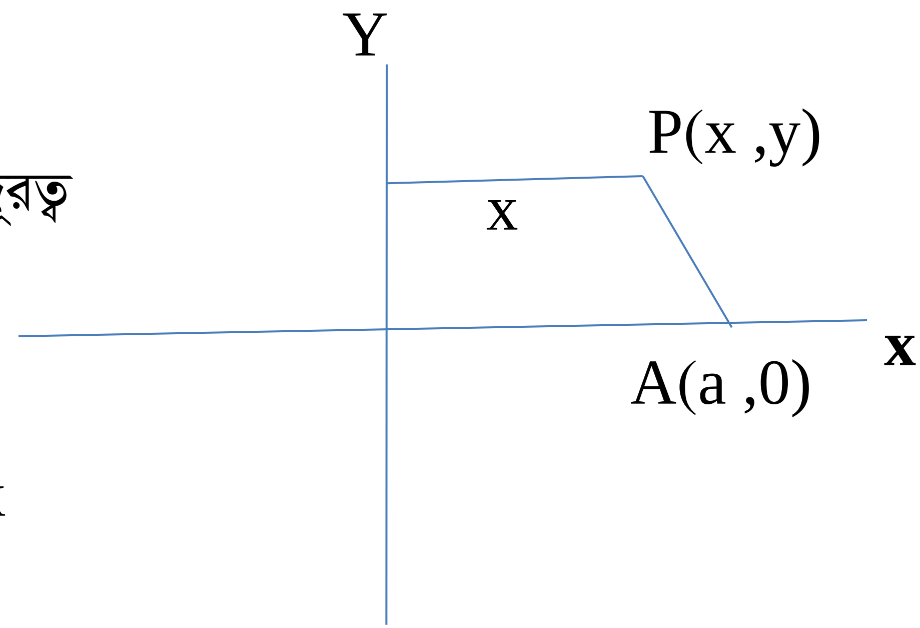
৯ম অধ্যায়

সঞ্চার পথ এবং এর সমীকরণ

(locus and its equestion)

১। একটি বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা (a ,0) বিন্দু এবং Y অক্ষরেখা হতে সর্বদা সমদূরবর্তী

সমাধান ঃ মনে করি, চালমান বিন্দু P (x ,y)



P (x ,y) এবং A(a ,0) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$

Y অক্ষরেখা হতে P (x ,y) বিন্দুর দূরত্ব = x

শর্তে ,
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x$$

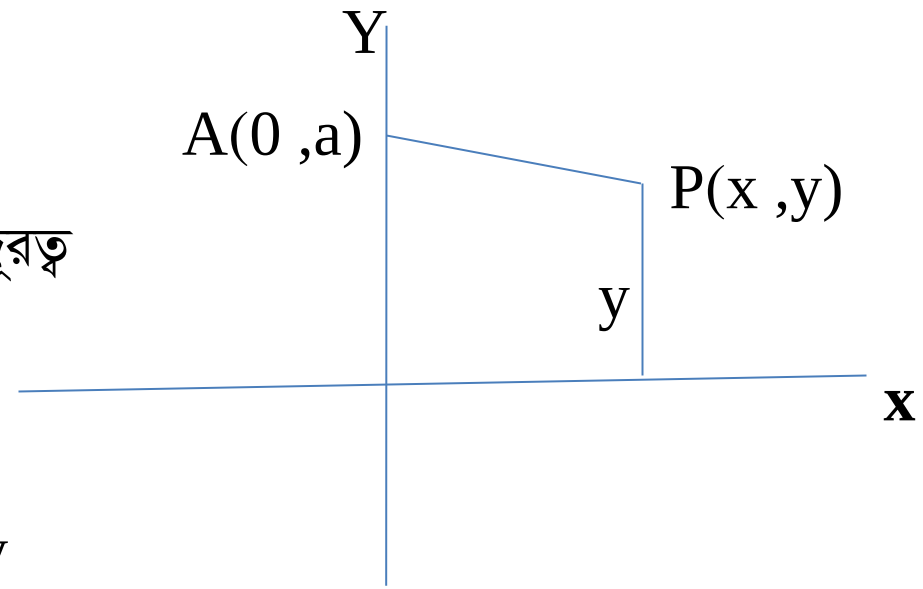
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2$$

$$\therefore y^2 - 2ax + a^2 = 0$$

ইহাই নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ।

১। একটি বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা (0 ,a) বিন্দু এবং X অক্ষরেখা হতে সর্বদা সমদূরবর্তী

সমাধান ঃ মনে করি, চালমান বিন্দু P (x ,y)



P (x ,y) এবং A(0 ,a) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$= \sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2}$$

X অক্ষরেখা হতে P (x ,y) বিন্দুর দূরত্ব = y

শর্তে ,

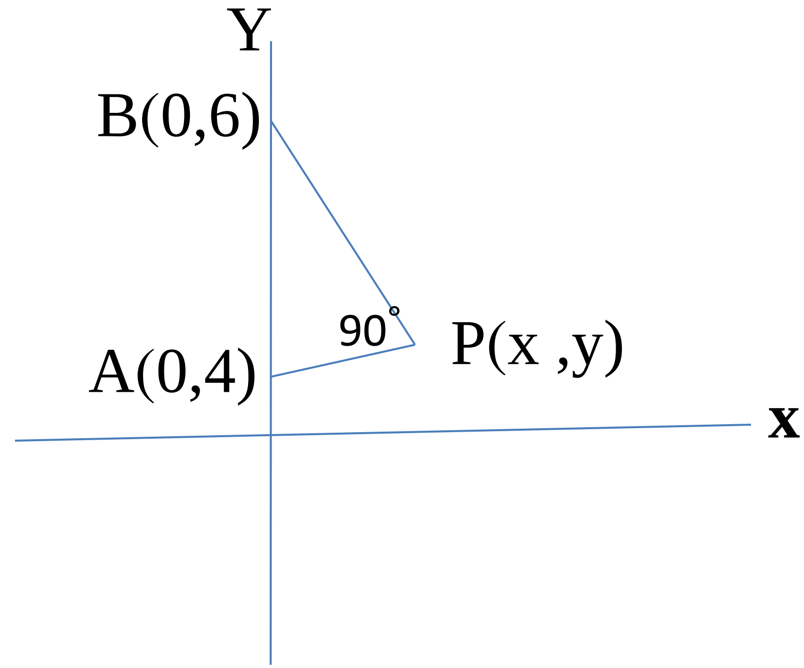
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2} = y$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2$$

$$\therefore x^2 - 2ay + a^2 = 0$$

ইহাই নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ।

১৩। A(0 ,4) এবং B(0 ,6) দুটি স্থির বিন্দু। P একটি চলমান বিন্দু এমনভাবে যেন AB সরলরেখা P বিন্দুতে সর্বদা একসমকোণ উৎপন্ন করে। P বিন্দুটির সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ মনে করি, চালমান বিন্দু P (x ,y)

A(0,4) এবং B(0,6) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$AB = \sqrt{(0-0)^2+(6-4)^2}$$
$$= 2$$

A(0,4) এবং P(x,y) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$AP = \sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}$$

B(0,6) এবং P(x,y) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$BP = \sqrt{(x-0)^2+(y-6)^2}$$

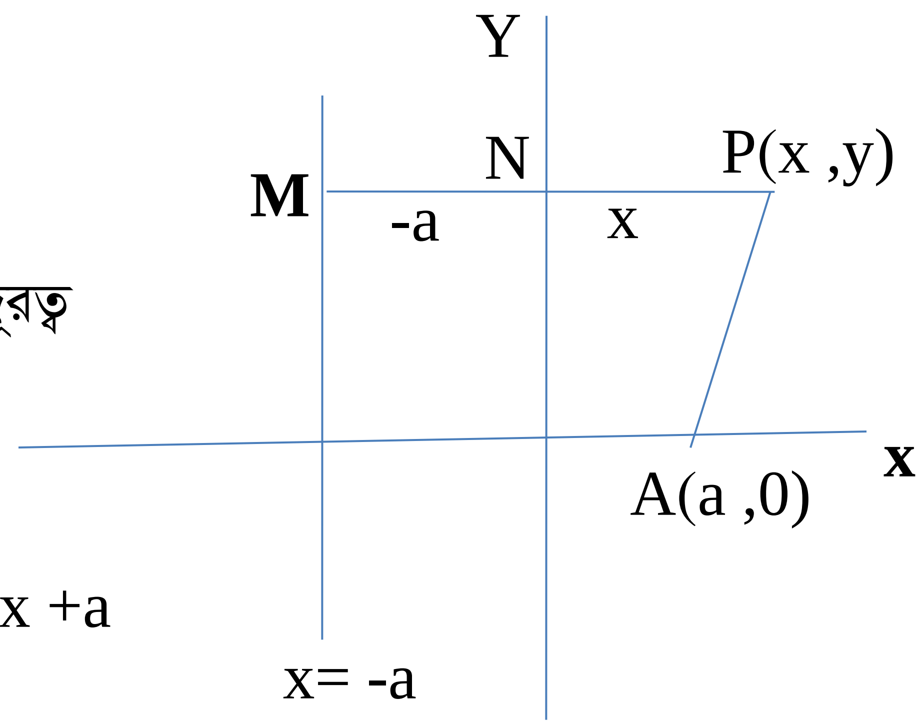
AB রেখা P বিন্দুতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে

সুতরাং,
$$AP^2+BP^2=AB^2$$
$$(x-0)^2+(y-4)^2+(x-0)^2+(y-6)^2=2^2$$
$$x^2+y^2-8y+16+x^2+y^2-12y+36=4$$
$$2x^2+2y^2-20y+48=0$$
$$x^2+y^2-10y+24=0$$

ইহাই P বিন্দুর সঞ্চার বিন্দুর পথের সমীকরণ।

** P(x ,y) বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা (a ,0) বিন্দু এবং x= -a রেখা হতে সমদূরবর্তী

সমাধান ঃ মনে করি, চালমান বিন্দু P (x ,y)



P (x ,y) এবং A(a ,0) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$

x = -a রেখা হতে P (x ,y) বিন্দুর দূরত্ব = x +a

শর্তে ,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = (x+a)$$

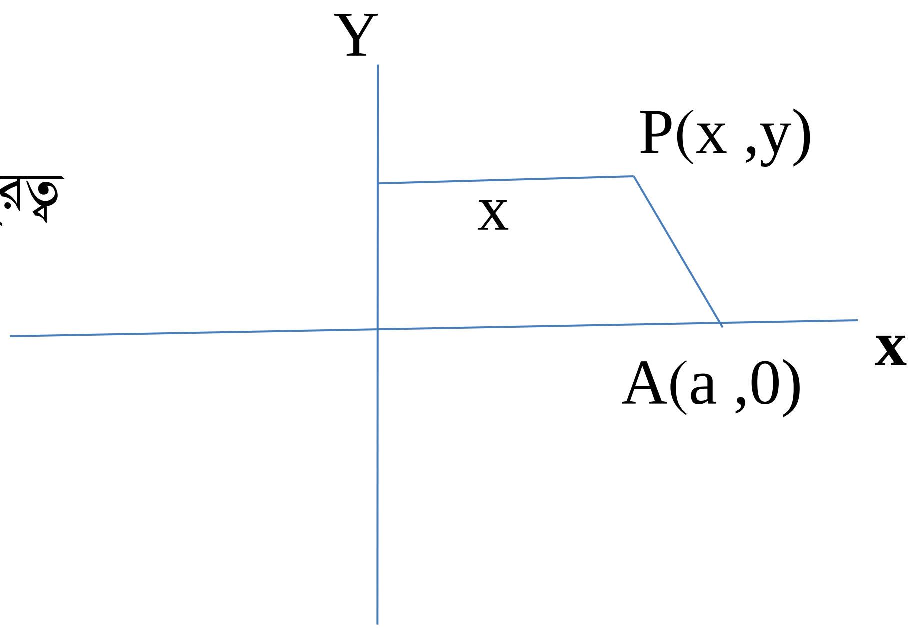
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$\therefore y^2 = 4ax$$

ইহাই নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ।

১। একটি বিন্দু সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা (a ,0) বিন্দু এবং Y অক্ষরেখা হতে সর্বদা সমদূরবর্তী

সমাধান ঃ মনে করি, চালমান বিন্দু P (x ,y)



P (x ,y) এবং A(a ,0) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$

Y অক্ষরেখা হতে P (x ,y) বিন্দুর দূরত্ব = x

শর্তে ,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x$$

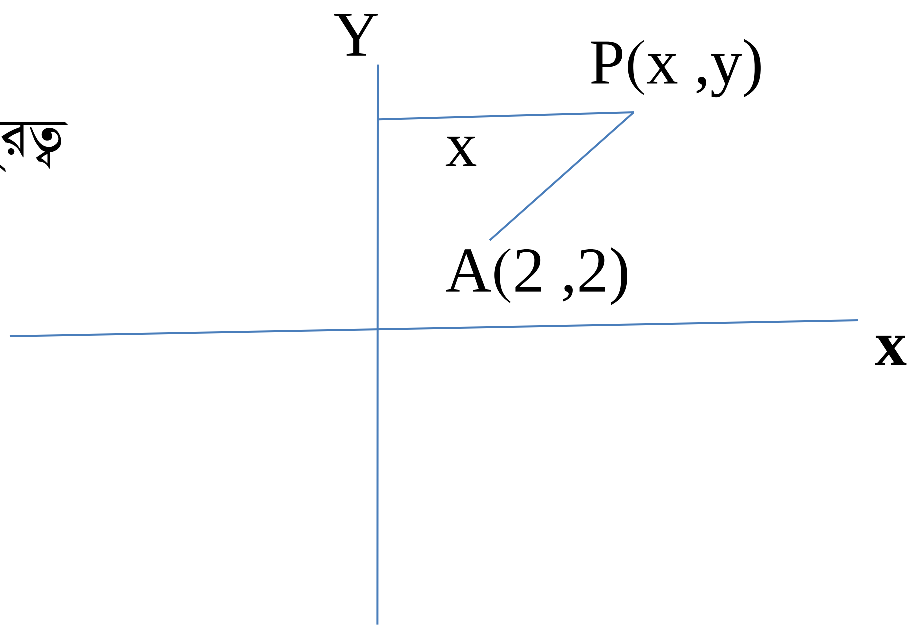
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2$$

$$\therefore y^2 - 2ax + a^2 = 0$$

ইহাই নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ।

১। একটি বিন্দু এমনভাবে চলছে যে, Y অক্ষ হতে এর দূরত্ব (2 ,2) বিন্দু হতে এর দূরত্বের দ্বিগুণ। বিন্দুটির সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, চালমান বিন্দু P (x ,y)



P (x ,y) এবং A(2 ,2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$= \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$

Y অক্ষরেখা হতে P (x ,y) বিন্দুর দূরত্ব = x

শর্তে , $x = 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$

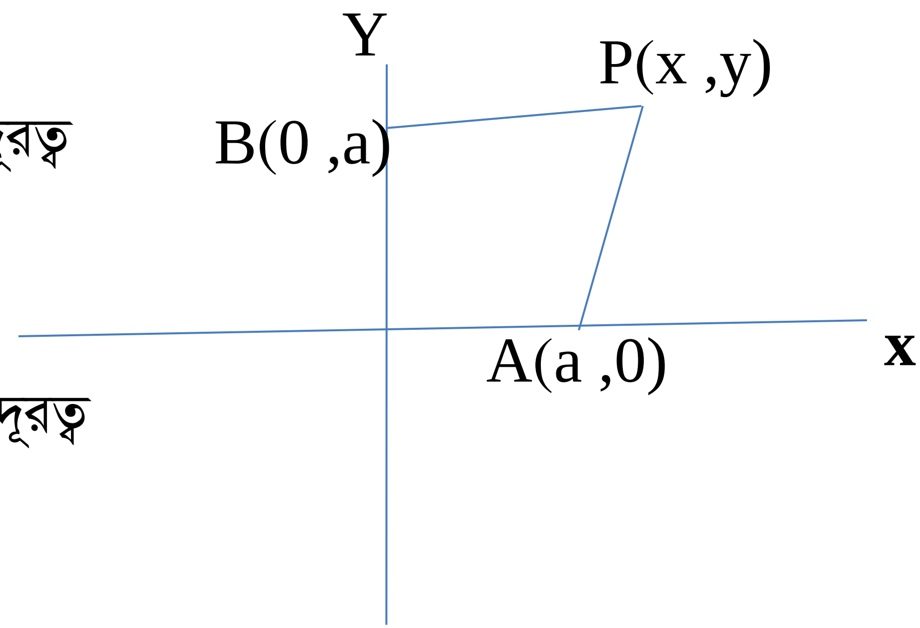
$$x^2 = 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 - 16y + 16$$

$$\therefore 3x^2 + 4y^2 - 16x - 16y + 32 = 0$$

ইহাই নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ।

** একটি বিন্দু এমনভাবে চলছে যে, দুটি স্থির বিন্দু (a ,0) এবং (0 ,a) হতে এর দূরত্বের বর্গের অন্তরফল সর্বদা 2a । চলমান বিন্দুটির সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, চালমান বিন্দু P (x ,y)



P (x ,y) এবং A(a ,0) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$=\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}$$

P (x ,y) এবং A(0 , a) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$=\sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2}$$

শর্তে ,

$$\left\{\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}\right\}^2-\left\{\sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2}\right\}^2=\pm 2$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2-x^2-y^2+2ay-a^2=\pm 2$$

$$2a(y-x)=\pm 2$$

$$\therefore y=x\pm 1$$

ইহাই নির্ণেয় সঞ্চার পথের সমীকরণ।