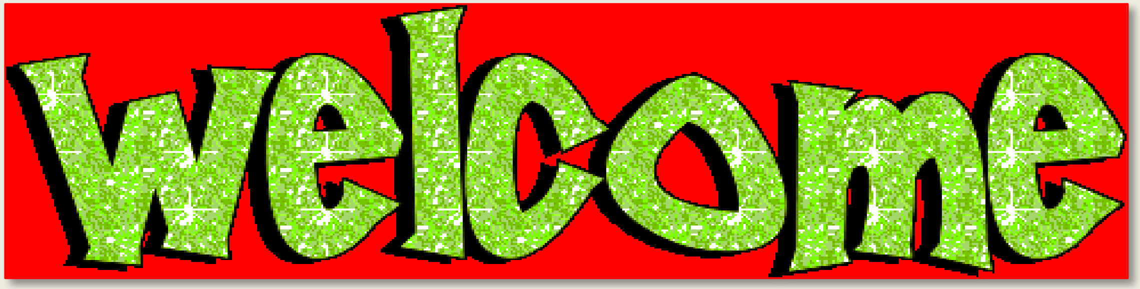

welcome

স্বাগতম

মুহাম্মদ আবু ইউসুফ
চিফ ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক) গণিত
ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট,

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-২ কোড : ২৫৯২১
টেকনোলজি : সকল

অধ্যায় –৭

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x . \log_e a$

3. $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

4. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

5. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

6. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x . \cot x$

7. $\frac{d}{dx}(x) = 1$

8. $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

9. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1-x^2}$

11. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}) = \frac{1}{1-x^2}$

12. $\frac{d}{dx}\left(\frac{U}{v}\right) = \frac{V\frac{d}{dx}(u) - u.\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

13. $\frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos ax$

14. $\frac{d}{dx}(\tan ax) = a\sec^2 ax$

15. $\dfrac{d}{dx}[(ax+b)^n] = an(ax+b)^{n-1}$

16. $\dfrac{d}{dx}(\text{cosec } ax) = -\text{cosec } ax \tan ax$

17. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = --\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

18. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

19. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

20. $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x}\log_a e$

21. $\dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dz} \cdot \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$

22. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

23. $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

24. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \, x. \tan x$

25. $\dfrac{d}{dx}(ax) = a$

26. $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

27. $\dfrac{d}{dx}(\tan\text{-}1x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

28. $\frac{d}{dx}$ (cosec-1x) = - $\frac{1}{X\sqrt{X^2-1}}$

29. $\frac{d}{dx}$ (u.v) = u $\frac{d}{dx}$ (v) + v $\frac{d}{dx}$ (u)

30. $\frac{d}{dx}$ (e^{ax}) = ae^{ax}

31. $\frac{d}{dx}$ (cos ax) = -a sin ax

32. $\frac{d}{dx}$(cot ax) = - a cosec2 ax

33. $\frac{d}{dx}$(sec ax) = a sec ax tan ax

অন্তরীকরণের ধারণা

১. $\dfrac{\tan x + \cot x}{3e^x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan x + \cot x}{3ex}\right)$$

$$= \frac{3e^x \frac{d}{dx}(\tan x + \cot x) - (\tan x + \cot x)\frac{d}{dx}(3ex)}{(3e^x)^2}$$

$$= \frac{3e^x(\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x) - (\tan x + \cot x)\, 3e^x}{9e^{2x}}$$

$$= \frac{3e^x(\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x - \tan x - \cot x)}{9e^{2x}}$$

$$= \frac{\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x - \tan x - \cot x}{3e^x}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 x - 1 - \cot^2 x - \tan x - \cot x}{3e^x}$$

$$= \frac{\tan^2 x - \cot^2 x - \tan x - \cot x}{3e^x}$$

$$= \frac{(\tan x - \cot x)(\tan x + \cot x) - (\tan x + \cot x)}{3e^x}$$

$$= \frac{(\tan x - \cot x)(\tan x + \cot x - 1)}{3e^x}$$

Ans

2. $y = x(x^2 - 12)$ হলে , x এর কোন মানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে

সমাধান : $y = x^3 - 12$

$$\frac{d}{dx} = 3x^2 - 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 = 12$

$X^2 = 4$

$X = +2$

Ans

3. sec² (log cosx) সমাধান :

$$\frac{d}{dx}[\sec^2(\log \cos x)]$$

$$= 2 \sec(\log \cos x) \cdot \frac{d}{dx}[\sec(\log \cos x)]$$

$$= 2 \sec(\log \cos x) \cdot \sec(\log \cos x) \tan(\log \cos x)\ x \quad (\log \cos x)$$

$$= 2 \sec^2(\log \cos x) \cdot \tan(\log \cos x) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= 2\ \text{see}^2(\log \cos x) \cdot \tan(\log \cos x) \cdot \frac{1}{\cos x}(-\sin x)$$

$$= -2 \sec^2(\log \cos x) \tan(\log \cos x) \tan x$$

Ans

অধ্যায় ৮

$\frac{dy}{dx}$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

লগারিদম সূত্রের সাহায্যে অন্তরীকরণ :

1. x-cos-1x

সমাধান :

ধরি, $y = x^{\cos^{-1}x}$

$\log y = \cos^{-1} x . \log x$

উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos^{-1}x . \frac{1}{x} + \log x . X \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{\cos^{-1}x}{x} \quad \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$$

$$= x^{\cos\text{-}1x} \quad \frac{\cos^{-1}x}{x} \quad \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ans

2. $y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$ বক্ররেখাটি যে-সব বিন্দুতে x অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুগুলোতে সেটির ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান :

$y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$

বা, $y = (x^2 - 1)(x - 3) = x^3 - x - 3x^2 + 3$

বা, $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ ....(i)

সমীকরণ (i)-কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dx}{dy} = 3x^2 - 6x - 1$

আবার, যেহেতু বক্ররেখাটি x-অক্ষকে ছেদ করে, সুতরাং $y = 0$

$(x + 1)(x - 1)(x - 3) = 0$

$x + 1 = 0$ বা, $x = -1$

অথবা, $x - 1 = 0$ বা, $x = 1$

এবং $x - 3 = 0$ বা, $x = 3$. [বাকাশিবো-’৯৬, ২০০০, ১৪ (T.T)] :.

ছেদবিন্দুর স্থানাংক = (–1, 0) (1, 0) (3,0)

সুতরাং, (-1,0) বিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 3(-1)^2 - 6.(-1) - 1 = 8$

(1, 0) “ “ “ “ $\frac{dy}{dx} = 3(1)2 - 6(1) - 1 = -4$

(3,0) বিন্দুতে ঢাল, $\frac{dy}{dx}$ =3(3)2-6(3)-1=8

রেখাটির ঢালগুলো যথাক্রমে 8, 4, 8

(Ans.)

3. $x^2 + y - 2x - 3 = 0$ সঞ্চার পথের যে বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তা নির্ণয় কর।

-সমাধান

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

বা, $2x + 2y.\frac{dy}{dx} - 2 = 0$

বা, $2y.\frac{dy}{dx} = 2 - 2x$

বা, $y \frac{dy}{dx} = 1 - x$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{y}$

(x, y) বিন্দুতে স্পর্শকটির ঢাল, $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{y}$

যে-সব বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল, সে-সব বিন্দুতে

$\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $\frac{1 - x}{y} = 0$

বা, $1 - x = 0$

.. $x = 1$

x-এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, (

$(1)^2 + y^2 - 2(1) - 3 = 0$

বা, $y^2 = 2 + 3 - 1 = 4$.

. $y = \pm 2$

.: নির্ণেয় বিন্দু = (1, ° 2)

(Ans.)

4. $x^2 + 2ax + y = 0$ বক্ররেখাটির উপর এমন বিন্দুগুলো বের কর, যেখানে স্পর্শকসমূহ x-অক্ষের উপর লম্ব হয়।

সমাধান :

$x^2 + 2ax + y^2 = 0$ ....(i)

বা, $y^2 = -x^2 - 2ax$

উভয়পক্ষক্ষে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$2y\frac{dy}{dx} = -2x - 2a$

$= \frac{(x + a)}{y}$

স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\frac{dy}{dx} = \infty$

বা, $-\frac{(x + a)}{y} = \infty$

অধ্যায়-৯

লিবনীজ উপপাদ্য

যদি x চলকের দুটি ফাংশনের n-তম অন্তরক নির্ণয় করা যায়, তবে এদের গুনফলের n-তম অন্তরক সহগ নির্ণয় করার জন্য জার্মান গণিতবিদ গটফ্রেট উইলিয়াম লিবনীজ (Gottfried William Leibnitz) একটি সূত্র আবিষ্কার করেন। এই সূত্রটিকে তাঁর নামানুসারে লিবনীজ উপপাদ্য বলা হয়।

লিবনীজ উপপাদ্য ঃ যদি u এবং v প্রত্যকেই x এর ফাংশন হয়, তবে এদের গুনফলের n-তম অন্তরক সহগ হলো,

$$(uv)_n = uv_n + {}^nc_1 u_1 v_{n-1} + {}^nc_2 u_2 v_{n-2} + {}^nc_3 u_3 v_{n-3} + \ldots\ldots\ldots + {}^nc_r u_r v_{n-r} + \ldots\ldots. + u_n v$$

যখন u এবং v এর সূচকগুলো x এর সাপেক্ষে কতবার অন্তরক সহগ হয়েছে তা নির্দেশ করে।

প্রমাণঃ ধরি

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$y_1 = uv_1 + u_1 v$$

$$y_2 = uv_2 + u_1 v_1 + u_1 v_1 + u_2 v$$

$$y_2 = uv_2 + 2u_1 v_1 + u_2 \ldots\ldots.(i)$$

$$y_2 = uv_2 + {}^2c_1 u_1 v_{2-1} + u_2 v \left[\because {}^2c_1 = 2\right]$$

আবার (i)নং এর উভয় পক্ষকে x অন্তরীকরণ করে পাই

$$y_3 = uv_3 + u_1 v_2 + 2(u_1 v_2 + u_2 v_1) + u_2 v_1 + u_3 v$$

$$y_3 = uv_3 + 3u_1 v_2 + 3u_2 v_1 + u_3 v$$

$$y_3 = uv_3 + {}^3c_1 u_1 v_2 + {}^3c_2 u_2 v_1 + u_3 v$$

$$y_3 = uv_3 + {}^3c_1 u_1 v_{3-1} + {}^3c_2 u_2 v_{3-2} + u_3 v$$

অতএব, উপপাদ্যটি 2 এবং 3 এর জন্য সত্য।

ধরি, উপপাদ্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য।

$$y_m = uv_m + {}^m c_1 u_1 v_{m-1} + {}^m c_2 u_2 v_{m-2} + {}^m c_3 u_3 v_{m-3} \ldots\ldots\ldots + {}^m c_{r-1} u_{r-1} v_{m-r+1} + {}^m c_r u_3 v_{m-r} + \ldots\ldots\ldots + u_m v \ldots\ldots (ii)$$

(ii)নং এর উভয় পক্ষকে x অন্তরীকরণ করে পাই

$$y_{m+1} = (uv_{m+1} + u_1 v_m) + {}^m c_1 (u_1 v_m + u_2 v_{m-1}) + {}^m c_2 (u_2 v_{m-1} + u_3 v_{m-2}) + \ldots\ldots + {}^m c_{r-1} (u_{r-1} v_{m-r+2} + u_r v_{m-r+1}) + {}^m c_r (u_r v_{m-r+1} + u_{r+1} v_{m-r}) + \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots + u_{m+1} v \ldots.(iii)$$

$$y_{m+1} = uv_{m+1} + (1 + {}^m c_1) u_1 v_m + ({}^m c_1 + {}^m c_2) u_2 v_{m-1} + \ldots\ldots\ldots + ({}^m c_{r-1} + {}^m c_r) u_r v_{m-r+1} + \ldots\ldots + u_{m+1} v$$

weknow,

$$1 + {}^m c_1 = {}^{m+1} c_1$$

$${}^m c_1 + {}^m c_2 = {}^{m+1} c_2$$

$$\therefore y_{m+1} = uv_{m+1} + {}^{m+1} c_1 u_1 v_m + {}^{m+1} c_2 u_2 v_{m-1} + \ldots\ldots\ldots + {}^{m+1} c_r u_r v_{m-r+1} + \ldots\ldots + u_{m+1} v$$

সুতরাং উপপাদ্যটি $n = m+1$ এর জন্য সত্য।

যেহেতু উপপাদ্যটি $n = 2$, $n = 3$ এর জন্য সত্য।

এবং $n = m$ এবং $n = m+1$ এর জন্য সত্য।

সুতরাং n এর সকল মানের জন্য সত্য।

$$\therefore (uv)_n = uv_n + {}^n c_1 u_1 v_{n-1} + {}^n c_2 u_2 v_{n-1} + \ldots\ldots\ldots + {}^n c_r u_r v_{n-r} + \ldots\ldots + u_n v$$

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন : $y=(\sin^{-1})^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2-xy_1=2$

অথবা $\sin\sqrt{y}=x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2$

সমাধান ঃ $y=(\sin^{-1})^2$

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$y_1=2\sin^{-1}x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2}\,y_1=2\sin^{-1}x$$

$$(1-x^2)y_1^{\ 2}=4(\sin^{-1}x)^2=4y$$

আবার x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$(1-x^2)2y_1y_2-2xy_1^{\ 2}=4y_1$$

$$(1-x^2)y_2-xy_1=2 \text{ (প্রমাণিত)}$$

$y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$ হলে, প্রমাণ কর যে , $y_2-m^2y=0$

সমাধান ঃ $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$y_1=Ame^{mx}-Bme^{-mx}$$

$$y_2=Am^2e^{mx}+Bm^2e^{-mx}$$

$$y_2=m^2(Ae^{mx}+Be^{-mx})=m^2y$$

$$y_2-m^2y=0$$ (প্রমাণিত)

$y=e^{a\sin^{-1}x}$ হলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $(1-x^2)y_2-xy_1-ay=0$

(ii) $(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-(n^2-a^2)y_n=0$

সমাধান ঃ (i) $y=e^{a\sin^{-1}x}$

$$y_1=ae^{a\sin^{-1}x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{(1-x^2)}y_1=ae^{a\sin^{-1}x}$$

$$(1-x^2)y_1^2=a^2y^2$$

$$(1-x^2)2y_1y_2-2xy_1^2=2a^2yy_1$$

$$(1-x^2)y_2-xy_1-a^2y=0.........(i)$$

(ii) $$\left(1-x^2\right)y_2-xy_1-a^2y=0$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\left(1-x^2\right)y_{n+2}+{}^nc_1(-2x)y_{n+1}+{}^nc_2(-2)y_n-xy_{n+1}-{}^nc_1(1)y_n-a^2y_n=0$$

$$\left(1-x^2\right)y_{n+2}-2nxy_{n+1}+{}^nc_1-n(n-1)y_n-xy_{n+1}-xy_n-a^2y_n=0$$

$$\left(1-x^2\right)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-(n^2+a^2)y_n=0$$

(প্রমাণিত)

স্বাগতম

মুহাম্মদ আবু ইউসুফ
চিফ ইন্সট্রাক্টর (নন-টেক) গণিত
ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইন্সটিটিউট ,

বিষয় : ম্যাথমেটিক্স-২ কোড : ২৫৯২১
টেকনোলজি : সকল

অধ্যায়-১০

আংশিক অন্তরীকরণ (Partial differention)

আংশিক অন্তরীকরণ(definition Partial Derivatives): একাধিক স্বাধীন চলকের ফাংশনকে একটি স্বাধীন চলকের সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় করার সময় ঐ স্বাধীন চলক ব্যতীত অন্যান্য স্বাধীন চলককে ধ্রুবক ধরে অন্তরক সহগ নির্ণয় করার পদ্ধতি আংশিক অন্তরীকরণ বলা হয়।

মনে করি, $u = f(x, y)$ দুটি স্বাধীন চলরাশি x ও y এর একটি ফাংশন। y কে ধ্রুবক ধরে u কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে যে অন্তরক সহগ পাওয়া যায় তাকে x এর সাপেক্ষে $u = f(x, y)$ এর আংশিক অন্তরক সহগ বলা হয় এবং একে $\frac{\delta u}{\delta x}$ বা u_x , $\frac{\delta f}{\delta x}$ বা f_x প্রতীক দ্বারা প্রকাশ বলা হয়।

অনুরূপে x কে ধ্রুবক ধরে u কে y এর আংশিক অন্তরক সহগকে $\frac{\delta u}{\delta y}$ বা u_y , $\frac{\delta f}{\delta y}$ বা f_y প্রতীক দ্বারা প্রকাশ বলা হয়।

সম্পূর্ণ অন্তরক সূত্র(Total Differential) : যদি $u=f(x,y)$ এবং $x=\phi(t), y=\psi(t)$ হয়, তবে $\frac{du}{dt}=\frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dt}$ হবে যদি $\frac{dx}{dt}$ এবং $\frac{dy}{dt}$ অস্তিত্ব বিদ্যমান থাকে।

সমমাত্রিক ফাংশন (Homogeneous Fuction) : যদি কোনো বহুপদ বিশিষ্ট ফাংশনের প্রত্যক পদের x ও y এর ঘাত (Power) যোগ করলে সমান হয়, তাহলে ঐ ফাংশনকে সমমাত্রিক ফাংশন বলা হয়।

ধরি , $f(x,y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+a_3x^{n-3}y^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_ny^n$

এখানে প্রতিটি পদে x ও y এর মাত্রা যোগ করলে মাত্রা হয় n কাজেই f(x,y) একটি সমমাত্রিক ফাংশন।

সমমাত্রিক ফাংশনের জন্য অয়লারের উপপাদ্য (Euler`s Theorem Homogeneous Fuction) :

u যদি x ও y চলকের n ঘাতের সমমাত্রিক ফাংশন হয় তবে $x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=nu$

প্রমাণ : যেহেতু u যদি x ও y চলকের n ঘাতের সমমাত্রিক ফাংশন

সুতরাং $u=x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$..........(i)

$$\therefore \frac{\delta u}{\delta x}=x^n f'\left(\frac{y}{x}\right)\times\left(\frac{-y}{x^2}\right)+nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}=-yx^{n-2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+nx^{n-1}f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x\frac{\delta u}{\delta x}=-yx^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right)+nx^{n}f\left(\frac{y}{x}\right)..........(ii)$$

আবার, $\frac{\delta u}{\delta x}=x^n f'\left(\frac{y}{x}\right)\times\left(\frac{1}{x}\right)=x^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right)$

$$y\frac{\delta u}{\delta x}=yx^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right)..........(iii)$$

(ii) ও (iii) যোগ করে পাই $x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=nx^n f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=nu$$

প্রশ্ন : যদি $v = x^2 + y^2 + z^2$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} = 6$

সমাধান ঃ $\because v = x^2 + y^2 + z^2 ....(i)$

x এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{\delta v}{\delta x} = 2x$$

$$\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} = 2$$

অনুরূপে, (i) নং কে y ও z এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{\delta v}{\delta y} = 2y$$

$$\frac{\delta^2 v}{\delta y^2} = 2$$

$$\frac{\delta v}{\delta z} = 2z$$

$$\frac{\delta^2 v}{\delta z^2} = 2$$

$$\therefore \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} = 2 + 2 + 2 = 6$$

প্রশ্ন : যদি $u=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=0$

সমাধান ঃ

$$u=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta u}{\delta x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right)=-\frac{y}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right)=\frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)=\frac{\delta}{\delta x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=-\left[\frac{(x^2+y^2)\cdot 0-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\right]=$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta u}{\delta y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)=\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=\frac{(x^2+y^2)\cdot 0-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=0$$

প্রশ্ন ৬: যদি $u=\log(x^2+y^2-2xy)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta y}=0$

সমাধান ঃ $=\log(x^2+y^2-2xy)=\log(x-y)^2=2\log(x-y)$

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{2}{x-y}$$

$$u=2\log(x-y)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{2}{x-y}$$

$$\therefore \frac{\delta u}{\delta x}+\frac{\delta u}{\delta y}=\frac{2}{x-y}-\frac{2}{x-y}=0$$

প্রশ্ন ২৩: যদি $u=\cos^{-1}\frac{x}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=0$

সমাধান ঃ

$$u=\cos^{-1}\frac{x}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{\delta u}{\delta x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\times\frac{1}{y}+\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\times\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}=-\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\therefore x\frac{\delta u}{\delta x}=-\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$u=\cos^{-1}\frac{x}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\times\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\times\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y}=\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\therefore y\frac{\delta u}{\delta y}=\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\therefore x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=-\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

প্রশ্ন ৩৯(i): $u = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$ এর ক্ষেত্রে অয়লারের সূত্র প্রমাণ কর।

সমাধান ঃ $u = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$

এখানে, u ফাংশনটি x ও y চলকের 3 বিশিষ্ট সমমাত্রিক ফাংশন।

সুতরাং প্রমাণ করতে হবে যে, $x\frac{\delta u}{\delta x} + y\frac{\delta u}{\delta y} = 3u$

$$u = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 3x^2 + 6xy + 3y^2$$

$$u = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = 3y^2 + 3x^2y + 6xy$$

$$\begin{aligned}
\therefore x\frac{\delta u}{\delta x} + y\frac{\delta u}{\delta x} &= x(3x^2 + 6xy + 3y^2) + y(3x^2 + 6xy + 3y^2) \\
&= x(3x^2 + 6xy + 3y^2) + y(3x^2 + 6xy + 3y^2) \\
&= 3x^3 + 6x^2y + 3xy^2 + 3yx^2 + 6xy^2 + 3y^3 \\
&= 3x^3 + 9x^2y + 9xy^2 + 3y^3 \\
&= 3(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)
\end{aligned}$$

(প্রমাণিত)

অধ্যায় -১১
অনির্দিষ্ট যোজিতফল

** ফাংশন সমূহের অন্তরক সহগ এবং তাদের সমাকলিত সম।

$(i)\ \frac{d}{dx}\left(x^{n}\right)=nx^{n-1}$

$(ii)\ \frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}$

$(iii)\ \frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)=e^{x}$

$(iv)\ \frac{d}{dx}\left(e^{mx}\right)=me^{mx}$

$(v)\ \frac{d}{dx}\left(a^{x}\right)=a^{x}.\log_{e} a$

$(vi)\ \frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$

$(vii)\ \frac{d}{dx}(\cos x)=-\cos x$

$(viii)\ \frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^{2} x$

$(i)\int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$(ii)\int \frac{1}{x}dx=\log x$

$(iii)\int e^{x}dx=e^{x}$

$(iv)\int e^{mx}dx=\frac{1}{m}e^{mx}$

$(v)\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\log_{e} a}$

$(vi)\int \cos x dx=\sin x$

$(vii)\int \sin x dx=-\cos x$

$(viii)\int \sec^{2} x dx=\sec x \tan x$

$$(ix)\ \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$(x)\ \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$(xi)\ \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$(xii)\ \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(xiii)\ \frac{d}{dx}(\sin ax) = a \cos ax$$

$$(xiv)\ \frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \sin ax$$

$$(ix)\ \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x$$

$$(x)\ \int \sec x \tan x\,dx = \sec x$$

$$(xi)\ \int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x$$

$$(xii)\ \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$(xiii)\ \int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

** প্রয়োজনীয় সূত্র ঃ

$$1. \int \tan x dx = -\log \cos x = \log \sec x$$

$$2.. \int \cot x dx = \log \sin x = -\log \operatorname{cosec} x$$

$$3. \int \sec x dx = \log(\sec x + \tan x)$$

$$4. \int \operatorname{cosec} x dx = \log \tan \frac{x}{2}$$

$$5. \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$6. \int \frac{1}{1 + x^2} dx = \tan^{-1} x$$

$$7. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \log \frac{x - a}{x + a}$$

$$8. \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \log \frac{a + x}{a - x}$$

$$9.\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$10.\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sin^{-1}x$$

$$11.\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$12.\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx=\log\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$$

$$13.\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$14.\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

$$15.\int (uv)dx=u\int vdx-\int\left\{\frac{d}{dx}(u)\int vdx\right\}dx$$

** ফাংশন সমূহের যোজিতফল(সমাকলিত মান) নির্ণয় কর ঃ

*২(i) ঃ $\int \tan^2 dx$

$$= \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \tan x - x + c (Ans)$$

৩(ii) ঃ $\int 5\cos 4x \sin 3x dx$

$$= \frac{5}{2}\int 2\cos 4x \sin 3x dx$$

$$= \frac{5}{2}\int [\sin(4x+3x) - \sin(4x-3x)] dx$$

$$= \frac{5}{2}\int (\sin 7x - \sin x) dx$$

$$= \frac{5}{2}\left[-\frac{\cos 7x}{7} - \cos x\right] + c, (Ans)$$

৩(iii) ঃ

$$\int \sin 5x \sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2\sin 5x \sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos(5x-3x) - \cos(5x+3x)] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 8x}{8}\right] + c$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + c, (Ans)$$

8(iii) ঃ

$$\int \sin^4 x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(2\sin^2 x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos 2x\right)^2 dx$$

$$== \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\int dx - 2\int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{x - 2\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}\int 2\cos^2 2x dx\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int \left(1+\cos 4x\right) dx\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right\} + c$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}x - \sin 2x + + \frac{1}{8}\sin 4x\right\} + c$$

৫(i) ঃ

$$\int e^{\tan^{-1} x} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$let, z = \tan^{-1} x$$

$$dz = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\therefore \int e^z dz$$

$$= e^z + c$$

$$= e^{\tan^{-1} x} + c$$

$$(Ans)$$

১৬(i) ঃ $\int x\tan^{-1}x\,dx$

$$= \tan^{-1}x\int x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)\int x\,dx\right\}$$

$$= \tan^{-1}x\,\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{\left(1+x^2\right)-1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\left\{1-\frac{1}{1+x^2}\right\}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + c$$

(Ans)

অধ্যায় -১২
নির্দিষ্ট যোজিতফল
(Definite Integral)

১২.১ নির্দিষ্ট যোগজ (Definite Integration) : $f(x)$ যদি x এর ফাংশন হয় এবং (a, b) এলাকার মধ্যে $\varphi(x)$ যদি $f(x)$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ হয়, তাহলে x এর মান a হতে b তে পরিবর্তিত হওয়ায় $\varphi(x)$ এর মানের যে পরিবর্তন হয়, তাকে $\varphi(b)-\varphi(a)$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং যা a ও b এলাকার মধ্যে $f(x)$ এর নির্দিষ্ট যোগজ। প্রতীকের সাহায্যে ব্যক্ত করলে আমরা পাই

$\int f(x)dx = \varphi(x)+c$ হলে

$$\int_a^b f(x)dx = [\varphi(x)+c]_a^b$$

$$= [\varphi(b)+c-\varphi(a)-c] = \varphi(b)-\varphi(a)$$

এখানে a-কে (a, b) এলাকার মধ্যে নিম্নসীমা (Lower limit) এবং b-কে (Upper limit) উর্ধ্বসীমা বলা হয়।

❖সংক্ষিপ্ত ও রচনা মূলক প্রশ্নাবলি ঃ

• মান নির্ণয় কর :-

• ৩ (ii)

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 2\sin^2 x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1-\cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1-\cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - 0 + 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

• ৫ (ii)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x \sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin 5x \sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\cos(5x-3x) - \cos(5x+3x)\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \cos 8x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 8x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2.\frac{\pi}{4}}{2} - \frac{\sin 8.\frac{\pi}{4}}{8}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{0}{2} - \frac{0}{8}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\sin 2\pi}{8}\right] - 0 - 0$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{0}{8}\right]$$

$$= \frac{1}{4} (Ans)$$

- ঙ (i)

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}\,dx$$

$$=\frac{1}{12}\int_1^4 \sqrt{z}\,dz$$

$$=\frac{1}{12}\int_1^4 z^{\frac{1}{2}}\,dz$$

$$=\frac{1}{12}\left[\frac{z^{3/2}}{3/2}\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{18}\left[4^{3/2}-1\right]$$

$$=\frac{1}{18}[8-1]=\frac{7}{18}\,(Ans)$$

let

$$1+3x^4=z$$

$$12x^3dx=dz$$

$$x^3dx=\frac{1}{12}dz$$

x	z
0	1
1	4

- ঙ (ii)

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+7}$$

$$=\int_2^3 \frac{dx}{\left(x^2-4x+4\right)+3}$$

$$=\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{(x-2)}{\sqrt{3}}\right]_2^3$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{(3-2)}{\sqrt{3}}-\tan^{-1}\frac{(2-2)}{\sqrt{3}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\,(Ans)$$

• ৭ (iv)

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$= \int_2^3 \frac{dz}{z}$$

$$= [\log z]_2^3$$

$$= \log 3 - \log 2$$

$$= \log \frac{3}{2} (Ans)$$

let

$$1 + e^x = z$$

$$e^x dx = dz$$

x	z
log2	3
o	2

• ৮ (v) $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx$

$$= \int_0^4 \sqrt{4^2 - x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{4^2 - x^2}}{2} + \frac{4^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4} \right]_0^4$$

$$= \left(0 + 8\sin^{-1} 1 - 0 - 0\right)$$

$$= 8.\frac{\pi}{2} = 4\pi (Ans)$$

• ৮ (vi)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3\left(\frac{4}{3}-x^2\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-x^2}}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}.1}{2}-0\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}(Ans)$$

• ৯ (i)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$$

$$=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$$

$$1=\int_0^{\pi/2} \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$$

let

$\sin x = z$

$\cos x dx = dz$

x	z
$\frac{\pi}{2}$	1
o	0

$$=\int_0^1 \frac{\left(1-z^2\right)dz}{\sqrt{z}}$$

$$=\int_0^1 \left(z^{-1/2}-z^{3/2}\right)dz$$

$$=\left[\frac{z^{1/2}}{1/2}-\frac{z^{5/2}}{5/2}\right]_0^1$$

$$=\left(2-\frac{2}{5}-0+0\right)$$

$$=\frac{8}{5}(Ans)$$

- ১০ (i)

$$\int_0^1 \frac{\left(\tan^{-1} x\right)^2}{1+x^2} dx$$

let

$$\tan^{-1} x = z$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = dz$$

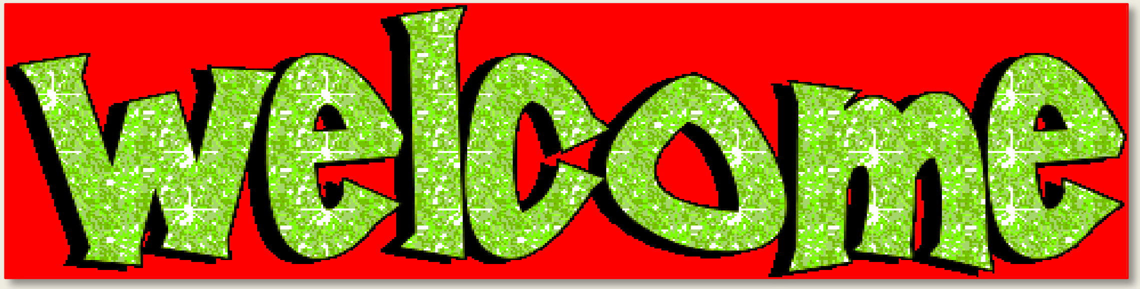
x	z
o	0
1	$\frac{\pi}{4}$

$$= \int_0^{\pi/4} z^2 dz$$

$$= \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{64} - 0\right)$$

$$= \frac{\pi^3}{192} (Ans)$$


welcome

শিক্ষক পরিচিতি

নাম- মুহাম্মদ আবু ইউসুফ

পদবী- চিফ ইনস্ট্রাক্টর(নন-টেক)

ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইনস্টিটিউট

ছাত্র-ছাত্রী পরিচিতি

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং

টেকনোলজি: সকল

২য় পর্ব

বিষয়: ম্যাথমেটিক্স-২

বিষয় কোড:২৫৯২১

ময়মনসিংহ পলিটেকনিক ইনস্টিটিউট

পাঠ পরিচিতি

অধ্যায় :১৩ ভেক্টর(Vector)

সময়:৪৫ মিনিট

পূর্ব জ্ঞান যাচাই

- ভেক্টর বলতে কি বুঝ ?
- দুটি ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ সম্পর্কে ধারনা ?
- একক ভেক্টর ও সমান্তরাল একক ভেক্টর বলতে কি বুঝ ?

শিখন ফল

এই অধ্যায়ের পাঠ শেষে............

১. ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ নির্ণয় করতে পারবে ।

২. ভেক্টরের ত্রিভুজর সূত্র প্রমাণ করতে পারবে ।

৩. ভেক্টরের সামন্তরিক সূত্র প্রমাণ করতে পারবে ।

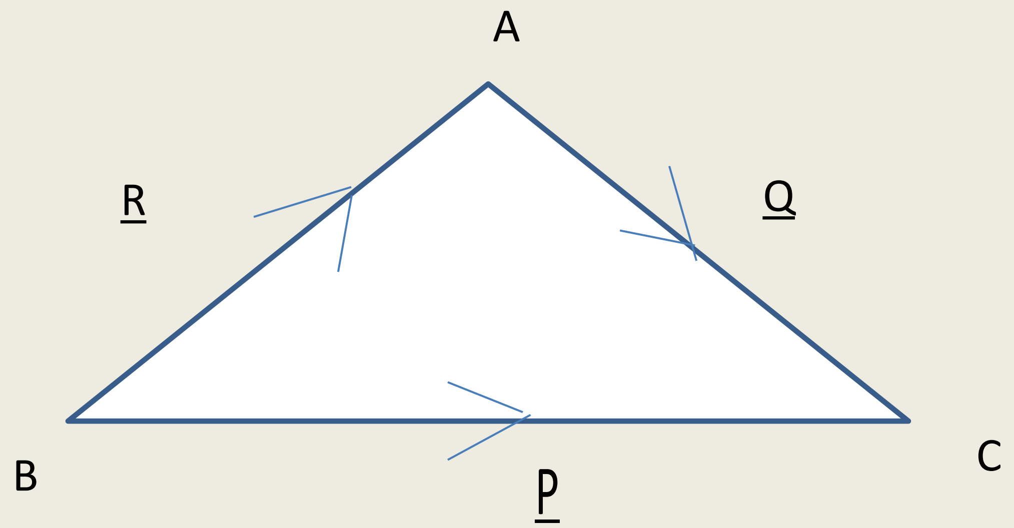
৪. ভেক্টরের সাহায্যে সমকোণী ,সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ প্রমাণ করতে পারবে ।

স্কেলার রাশি ঃ যে সমস্ত রাশির শুধুমাত্র মান জানলেই চলে, দিক নির্দেশের প্রয়োজন হয় না, তাকে স্কেলার রাশি বলে। যেমনঃ দ্রুতি, ওজন ইত্যাদি স্কেলার রাশি।

ভেক্টর রাশি (Vector) ঃ যে সকল রাশির মান ও দিক উভয়েই আছে, তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলে। যেমনঃ সরণ, ত্বরণ,বল, বেগ ইত্যাদি। কারণ এদের মান ও দিক উভয়ই আছে।

একক ভেক্টর: কোন ভেক্টরের পরম মান এক হলেএকে একক ভেক্টর বলে। মান শূন্য নয় এরূপ একটি ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টর রাশির দিকে বা তার সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায় ।

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র: যদি কোন ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু দুইটি ভেক্টর রাশি নির্দেশ করে , তাহলে ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুটি বিপরীত ক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধির মান নির্দেশ করে।



ΔABC এর ক্ষেত্রে,

$\underline{BC} + \underline{CA} = \underline{BA}$

$\underline{P} + \underline{Q} = \underline{R}$

- সামন্তরিকসূত্র ঃ কোনসামন্তরিকেরদুইটিসন্নিহিতবাহুদিয়ে দুইটি ভেক্টরের মান ও দিকসূচিতকরাহলে, উক্ত ভেক্টরদ্বয়েরসূচক রেখার ছেদবিন্দুগামীসামন্তরিকেরকর্ণটি ভেক্টরদ্বয়ের যোগফলেরমান ও দিকসূচিতকরবে।
- অবস্থান ভেক্টর(Position Vector) ঃকোননির্দিষ্ট বিন্দুর প্রেক্ষিতে অন্য যে কোন বিন্দুরঅবস্থান যে ভেক্টরদিয়েনির্দেশ করাহয়, তাকে ঐ বিন্দুরঅবস্থান ভেক্টরবলে।
- $\vec{A}$=x$\hat{\imath}$+y$\underline{j}$+z$\underline{k}$হলে

১). মান , $A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

২). সমান্তরালএকক ভেক্টর $= \frac{\vec{A}}{A}$

৩). দিক কোসাইন : $l = \frac{x}{A}$, $m = \frac{y}{A}$,$n = \frac{z}{A}$

৪). $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$

সমস্যা ১: $\underline{A}=4\hat{\imath}+2\underline{j}-4\underline{k}$ $\underline{B}=4\underline{i}+4\underline{j}-2\underline{k}$ এই ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর ।

সমাধান : $\underline{A}+\underline{B}=4\hat{\imath}+2\underline{j}-4+4\underline{i}+4\underline{j}-2\underline{k}$

$$=7\underline{i}+6\underline{j}-6\underline{k}$$

$$\therefore \left|\bar{A}+\bar{B}\right| = \sqrt{7^2+6^2+6^2} = \sqrt{121} = 11$$

নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \dfrac{7\bar{i}+6\bar{j}-6\bar{k}}{11}$

সমস্যা২: A ও B এর অবস্থান ভেক্টর (1,1,1) ও (2,3,-2) হলে $\underline{AB}$ ভেক্টরের মান ও দিক কোসাইন নির্ণয় কর ।

সমাধান : ধরি, o মূলবিন্দু

$$\underline{OA}=\underline{i}+\underline{j}+\underline{k} \text{ এবং}$$

$$\underline{OB}=2\underline{i}+3\underline{j}-2\underline{k}$$

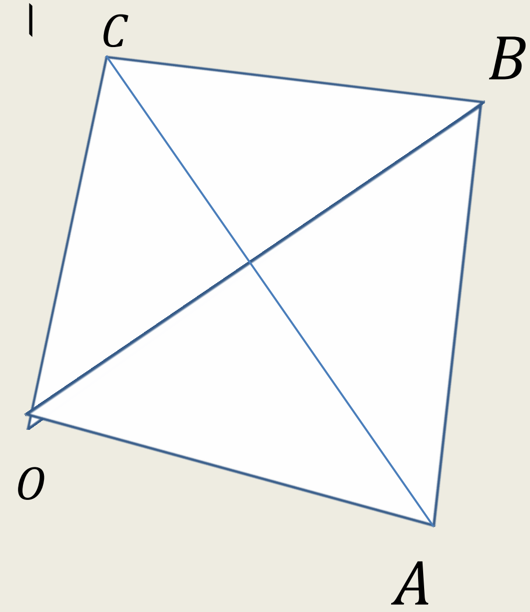
$$\therefore \underline{AB}=\underline{OB}-\underline{OA}=(2\underline{i}+3\underline{j}-2\underline{k})-(\underline{i}+\underline{j}+\underline{k})$$

$$=\underline{i}+2\underline{j}-3\underline{k}$$

$\underline{AB}$ ভেক্টরের মান, $\left|\underline{AB}\right|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$

$\underline{AB}$ ভেক্টরের দিক কোসাইন : $l=\frac{1}{\sqrt{14}}$ $,m=\frac{2}{\sqrt{14}},n=\frac{-3}{\sqrt{14}}$

সমস্যা৩: ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে A(4,5,1), B(2,4,-1) ও C(3,6,-3) হলে দেখাও যে,ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ ।



সমাধান: ধরি, o মূলবিন্দু ।

$\underline{OA}= 4\underline{i}+5\underline{j}+\underline{k}$

$\underline{OB}= 2\underline{i}+4\underline{j}-\underline{k}$

এবং $\underline{OC}= 3\underline{i}+6\underline{j}-3\underline{k}$

$\underline{AB}=\underline{OB}-\underline{OA}=(2\underline{i}+4\underline{j}-\underline{k})-(4\underline{i}+5\underline{j}+\underline{k})= -2\underline{i}-\underline{j}-2\underline{k}$

$\therefore AB=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2}=3$

$\underline{BC}=\underline{OC}-\underline{OB}=(3\underline{i}+6\underline{j}-3\underline{k})-(2\underline{i}+4\underline{j}-\underline{k})=\underline{i}+2\underline{j}-2\underline{k}$

$\therefore BC=\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2}=3$

$\underline{AC}=\underline{OC}-\underline{OA}=(3\underline{i}+6\underline{j}-3\underline{k})-(4\underline{i}+5\underline{j}+\underline{k})=-\underline{i}+\underline{j}-4\underline{k}$

$\therefore BC=\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-4)^2}=3\sqrt{2}$

ΔABC এর $AB=BC$ এবং $AB^2+BC^2=AC^2$ (প্রমাণিত)

দলীয় কাজ

- নিম্ন লিখিত সমস্যা গুলোর সমাধান নির্ণয় কর?

সমস্যা১: A ও B এর অবস্থান ভেক্টর (1,2,1) ও (1,3,-2) হলে $\underline{AB}$ ভেক্টরের মান নির্ণয় কর ।

সমস্যা২: $\underline{A}=3\hat{i}+2\underline{j}-4\underline{k}$ $\underline{B}=\underline{i}+4\underline{j}-2\underline{k}$ এই ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর ।

সমস্যা৩: ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে A(2,4,-1), B(4,5,1) ও C(3,6,-3) হলে দেখাও যে ,ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\underline{AB}$ ভেক্টরের দিক কোসাইন নির্ণয় কর ।

একক কাজ

১). $\underline{A}=2\underline{i}+2\underline{j}-\underline{k}$ $\underline{B}=5\underline{i}-3\underline{j}+2\underline{k}$ এই ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর ।

২). অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে

৩). ভেক্টরের মান নির্ণয়ের সূত্রটি লিখ।

পাঠ মূল্যায়ন

১). স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি কাকে বলে?

১). ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রটি বল ?

২).একক ভেক্টর কাকে বলে?

৩). সামান্তরিকের সূত্রটি লিখ ।

বাড়ীর কাজ

১). ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রটি বল ।

২). A ও B এর অবস্থান ভেক্টর (1,2,1) ও (1,1,-2) হলে $\underline{AB}$ ভেক্টরের মান নির্ণয় কর ।

৩). প্রমাণ কর যে, 2 $\underline{i}$-$\underline{j}$+$\underline{k}$, $\underline{i}$-3$\underline{j}$-5$\underline{k}$, 3$\underline{i}$-4$\underline{j}$-4$\underline{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

৪). ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে A(0,7,10), B(-1,6,6) ও C(-4,9,6) হলে দেখাও যে ,ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\underline{AB}$ ভেক্টরের দিক কোসাইন নির্ণয় কর ।

পাঠ পরিচিতি

অধ্যায় : ১৪

ভেক্টরের ডট গুণন

সময়:৪৫ মিনিট

পূর্ব জ্ঞান যাচাই

- ভেক্টরের ডট গুণন বলতে কি বুঝ?
- সমান্তরাল ও লম্ব বলতে কি বুঝ ?

এই অধ্যায়ের পাঠ শেষে.............

১. ভেক্টরের ডট গুণন নির্ণয় করতে পারবে ।

২. ভেক্টরের সাহায্যে লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় করতে পারবে ।

৩. ভেক্টরের সাহায্যে কোণ নির্ণয় করতে পারবে ।

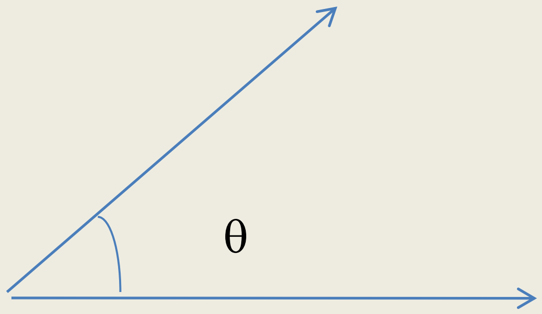
আজকের আলোচ্য বিষয়ঃ

ভেক্টরের ডট গুণন

অদিক বা স্কেলার বা ডট গুনফলের সংজ্ঞা :দুটি ভেক্টর রাশির পরম মানের গুনফল ও তাদের অর্ন্তগত কোণের কোসাইন অনুপাতের গুনফলকে তাদের অদিক বা স্কেলার বা ডট গুনফল বলে। দুইটি ভেক্টরের মাঝে ডট(.)চিহ্ন দিয়ে এই গুনফল বুঝানো হয় ।

দুটি ভেক্টরের স্কেলার বা ডট গুণন:

$\underline{a}.\underline{b}$= ab Cosθ , যখন $0 \le \theta \le \pi$



$$\bar{i}.\bar{i} = \bar{j}.\bar{j} = \bar{k}.\bar{k} = 1$$

$$\bar{i}.\bar{j} = \bar{j}.\bar{k} = \bar{k}.\bar{i} = 0$$

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

যদি $\underline{a} = a_1\hat{i}+b_1\underline{j}+c_1\underline{k}$, $\underline{b}=a_2\hat{i}+b_2\underline{j}+c_2\underline{k}$ হলে

1. $\underline{a}.\underline{b} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

2. দুইটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত ঃ $\underline{a}.\underline{b} = 0$

3. স্কেলার ত্রিগুণফলের সূত্র ঃ $\underline{a}.(\underline{b} \times \underline{c})$

সমস্যা১:$\bar{a}$=2 $\underline{i}$+3$\underline{j}$-$\underline{k}$, $\bar{b}$=- $\underline{i}$+5$\underline{j}$+$\underline{k}$ এই ভেক্টর দুইটিরঅদিকবা স্কেলারবা ডট গুনফলনির্ণয় কর ।

সমাধান : দেওয়াআছে, $\bar{a}$=2 $\underline{i}$+3$\underline{j}$-$\underline{k}$, $\bar{b}$=- $\underline{i}$+5$\underline{j}$+$\underline{k}$

নির্ণেয় স্কেলার গুণন,

$$\bar{a}.\bar{b}=(2\underline{i}+3\underline{j}-\underline{k}).(-\underline{i}+5\underline{j}+\underline{k})$$

$$=2.(-1)+3.5+(-1).1$$

$$=-2+15-1$$

$$=13$$

সমস্যা ২: $\underline{A}=4\,\underline{i}-2\,\underline{j}+4\underline{k}$ $\underline{B}=3\,\underline{i}-6\,\underline{j}-2\underline{k}$ এই ভেক্টর দুইটির অন্তঃস্থ কোণ নির্ণয় কর ।

সমাধান : ধরি, মধ্যবর্তী কোণ$=\theta$

$\underline{A}=4\,\underline{i}-2\,\underline{j}+4\underline{k}$ এবং $\underline{B}=3\,\underline{i}-6\,\underline{j}-2\underline{k}$

$$\underline{A}.\underline{B}=(4\,\underline{i}-2\,\underline{j}+4\underline{k}).(3\,\underline{i}-6\,\underline{j}-2\underline{k})$$
$$=12+12-8$$
$$=16$$

$$\left|\underline{A}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\left|\underline{B}\right| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$$

$$Cos\theta = \frac{\underline{A}.\underline{B}}{\left|\underline{A}\right|\left|\underline{B}\right|} = \frac{16}{6.7} = \frac{4}{21}$$

$$\therefore \theta = C\,\mathrm{os}^{-1}\,\frac{4}{21}$$

সমস্যা ৩:a -এরমান কত হলে$\text{A} = a\hat{\imath} - 3a\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ এবং $\underline{\text{B}} = a\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়পরস্পর লম্ব হবে?

সমাধান: প্রদত্তভেক্টরদ্বয়$\text{A} = a\hat{\imath} - 3a\hat{\jmath} + 2\hat{k}$এবং$\underline{\text{B}} = a\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$

যেহেতু ভেক্টরদ্বয়পরস্পর লম্ব।

$\therefore \overline{A} . \overline{B} = 0$

বা,$(a\hat{\imath} - 3a\hat{\jmath} + 2\hat{k}).(a\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}) = ০$

বা,$a.a - 3a.1 + 2.1 = 0$

বা,$a^2 - 3a + 2 = 0$

বা, $a^2 - 2a - a + 2 = 0$

বা, $(a - 2)(a - 1) = 0$

বা, $a = 2$ অথবা 1 [ans.]

সমস্যা-৪: $\bar{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \bar{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k};$
$\bar{B}$ বরাবরএরলম্বঅভিক্ষেপনির্ণয়কর।

সমাধান : $(\bar{A}.\bar{B}) = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

$=2.1 + (-1).2 + 1.2 = 2 - 2 + 2 = 2$

$B = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

$\bar{B}$ বরাবর $\bar{A}$ এরলম্বঅভিক্ষেপ $=(\bar{A}.\bar{B})/B$

$= 2/3$ [ans.]

সমস্যা-৫: $\bar{F} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}; \bar{S} = 5\hat{i} - 8\hat{j} + 3\hat{k};$

$\bar{F}$ বলএবং $\bar{S}$ সরণহলে $\bar{F}$ বলেরক্রিয়ায়কৃতকাজেরপরিমাণবেরকর।

সমাধান : $W = \bar{F}.\bar{S} = (\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}).(5\hat{i} - 8\hat{j} + 3\hat{k})$

$= 1.5 + (-2).(-8) + (-1).3$

$= 5 + 16 - 3$

$\therefore W = 18$ একক [ans.]

দলীয় কাজ

সমস্যা ১: ভেক্টরের ডট গুণন এর সূত্রটি লিখ।

সমস্যা ২: $\underline{A}=5\,\underline{i}-2\,\underline{j}+\underline{k}$ $\underline{B}=3\,\underline{i}-\underline{j}-2\underline{k}$ এই ভেক্টর দুইটির অন্তঃস্থ কোণ নির্ণয় কর।

সমস্যা ৩: a -এর মান কত হলে $A = a\hat{i} + 3a\hat{j} + 2k\hat{}$ এবং $\underline{B}= a\hat{i} + \hat{j} + k\hat{}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে?

একক কাজ

১. ভেক্টরের ডট গুণন বলতে কী বুঝায়?

২। স্কেলার ত্রিগুণফলের সূত্রটি লিখ ।

৩। $\bar{P} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$; $\bar{Q} = 4\hat{i} + m\hat{j} - 6\hat{k}$, m- এর মান কত হলে $\bar{P}$ ও $\bar{Q}$ পরস্পর লম্ব হবে?

বাড়ীর কাজ

সমস্যা-১: $\bar{P} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$; $\bar{Q} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর ।

সমস্যা-২: a -এর মান কত হলে $A = a\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ এবং $B = 2a\hat{\imath} + a\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে?

পাঠ পরিচিতি

অধ্যায় : ১৫

ভেক্টরের ক্রস গুণন

সময়:৪৫ মিনিট

পূর্ব জ্ঞান যাচাই

- ভেক্টরের ক্রস গুণন বলতে কি বুঝ?
- সমান্তরাল ও লম্ব বলতে কি বুঝ ?
- ত্রিভুজ ও সামন্তরিকের ক্ষেত্রফলের সূত্রগুলো কি কি ?

এই অধ্যায়ের পাঠ শেষে............

১. ভেক্টরের ক্রস গুণন নির্ণয় করতে পারবে ।

২. ভেক্টরের সাহায্যে ত্রিভুজর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে ।

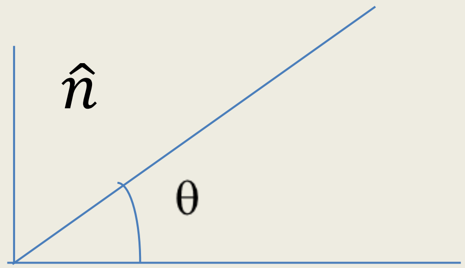
৩. ভেক্টরের সাহায্যে সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে ।

আজকের আলোচ্য বিষয়ঃ

ভেক্টরের ক্রস গুণন

দিক বা ভেক্টর বা ক্রস গুনফলের সংজ্ঞা :দুটি ভেক্টর রাশির পরম মানের গুনফল ও তাদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন অনুপাতের গুনফল দ্বারা ভেক্টর দুইটির দিক বা ভেক্টর বা ক্রস গুণের মান এবং ডান হাতি স্ক্রু পদ্ধতিতে উভয় ভেক্টরের লম্ব বরাবর এই গুনের দিক নির্দেশ করে। দুইটি ভেক্টরের মাঝে ক্রস($\times$)চিহ্ন দিয়ে এই গুনফল বুঝানো হয় ।

যেমন: $\overline{a} \times \overline{b} = ab \sin\theta \ \hat{n}$, যখন $0 \leq \theta \leq \pi$



$$\overline{i} \times \overline{i} = \overline{j} \times \overline{j} = \overline{k} \times \overline{k} = 0$$
$$\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$$
$$\overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}$$
$$\overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}$$
$$\overline{j} \times \overline{i} = -\overline{k}$$
$$\overline{k} \times \overline{j} = -\overline{i}$$
$$\overline{i} \times \overline{k} = -\overline{j}$$

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

যদি $\underline{a} = a_1\hat{i} + b_1\underline{j} + c_1\underline{k}$, $\underline{b} = a_2\hat{i} + b_2\underline{j} + c_2\underline{k}$ হলে

১।

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i}(b_1c_2 - c_1b_2) - \underline{j}(a_1c_2 - c_1a_2) + \underline{k}(a_1b_2 - b_1a_2)$$

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

২। ভেক্টর ত্রিগুণফলের সূত্রটি লিখ ।

উঃ $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} . \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} . \underline{b}) \underline{c}$

৩। $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর লম্ব একক ভেক্টর $= \dfrac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|}$

৪। দুইটি ভেক্টর পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার শর্ত : $\underline{a} \times \underline{b} = 0$

৫। একটি ত্রিভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}|\underline{a} \times \underline{b}|$

৬।একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\underline{a} \times \underline{b}|$

৭।একটি সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}|\underline{a} \times \underline{b}|$

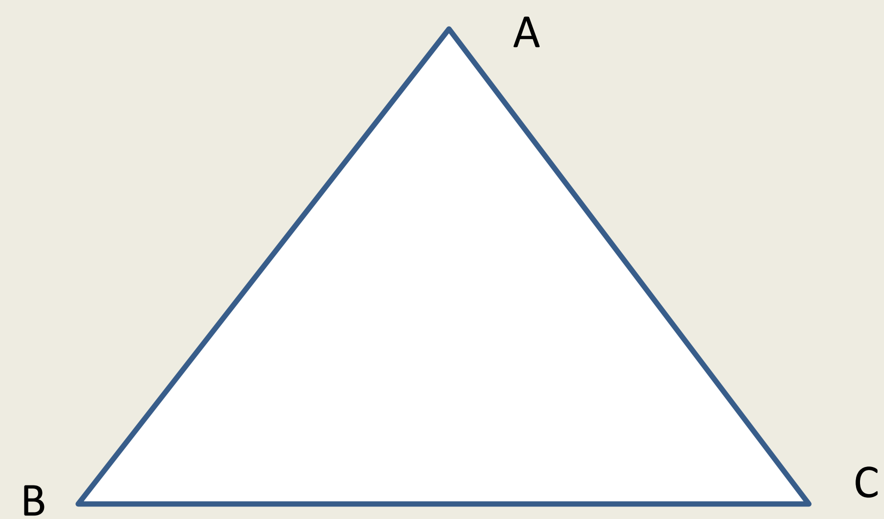
১.একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{A}=2\underline{i}-3\underline{j}-4\underline{k}$, $\underline{B}=\underline{i}+2\underline{j}+\underline{k}$, $\underline{C}=3\underline{i}-\underline{j}-2\underline{k}$ হলে ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

সমাধান : ধরি, o মূলবিন্দু

$\underline{OA}=2\underline{i}-3\underline{j}-4\underline{k}$

$\underline{OB}=\underline{i}+2\underline{j}+\underline{k}$

$\underline{OC}=3\underline{i}-\underline{j}-2\underline{k}$



$$\underline{AB}=\underline{OA}-\underline{OB}$$

$$=(2\underline{i}-3\underline{j}-4\underline{k})-(\underline{i}+2\underline{j}+\underline{k})$$

$$=2\underline{i}-3\underline{j}-4\underline{k}-\underline{i}-2\underline{j}-\underline{k}$$

$$=\underline{i}+5\underline{j}-5\underline{k}$$

$$\underline{AC} = \underline{OC} - \underline{OA}$$

$$= (3\underline{i}-\underline{j}-2\underline{k})-(2\underline{i}-3\underline{j}-4\underline{k})$$

$$= 3\underline{i}-\underline{j}-2\underline{k}-2\underline{i}+3\underline{j}+4\underline{k}$$

$$= \underline{i}+2\underline{j}+2\underline{k}$$

$$\underline{AB} \times \underline{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i}(10+10) - \underline{j}(2+5) + \underline{k}(2-5)$$

$$= 20\underline{i} - 7\underline{j} - 3\underline{k}$$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left|\underline{AB} \times \underline{AC}\right|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(20)^2 + (-7)^2 + (-3)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{400 + 49 + 9}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{458}$$ বর্গএকক

সমস্যা-২: একটি সামন্তরিকের কর্ণদ্বয় $-3\underline{i}+\underline{j}-2\underline{k}$ এবং $\underline{i}-3\underline{j}+4\underline{k}$ হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর?

সমাধানঃধরি ,সামান্তরিকেরকর্ণদ্বয় $\underline{a} = -3\underline{i}+\underline{j}-2\underline{k}$ এবং $\underline{b} = \underline{i}-3\underline{j}+4\underline{k}$

$$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i}(4-6) - \underline{j}(12+2) + \underline{k}(-9-1)$$

$$= -2\underline{i} - 14\underline{j} - 10\underline{k}$$

$$|\underline{a}\times\underline{b}| = \sqrt{(-2)^2+(-14)^2+(-10)^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\underline{a}\times\underline{b}| = \frac{1}{2}\times 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ বর্গএকক

সমস্যা-৩: একটি সামান্তরিক ঘনবস্তুর বাহুগুলো $\underline{A}= \underline{i}-3\underline{j}+4\underline{k}$, $\underline{B}= \underline{i}+2\underline{j}-\underline{k}$, $\underline{C}=3\underline{i}-\underline{j}+2\underline{k}$ হলে এর আয়তন নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ

$$\underline{B}\times\underline{C}=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\underline{i}(4-1)-\underline{j}(2+3)+\underline{k}(-1-6)$$

$$=3\underline{i}-5\underline{j}-7\underline{k}$$

সামান্তরিক ঘনবস্তুর আয়তন $= \underline{A}.(\underline{B}\times\underline{C})$

$$= (2\underline{i}-3\underline{j}+4\underline{k}).(3\underline{i}-5\underline{j}-7\underline{k})$$

$$= 2.3+(-3).(-5)+4.(-7)$$

$$= 6+15-28$$

$$= |-7|$$

$= 7$ ঘন একক [ans.]

দলীয় কাজ

সমস্যা১: $\underline{A}=3\hat{i}+3\underline{j}-\underline{k}$ $\underline{B}=\underline{i}+\underline{j}+\underline{k}$ এই ভেক্টর দুইটির ক্রস গুনফল নির্ণয় কর ।

সমস্যা২: যদি $\underline{A}=\underline{i}-2\underline{j}-3\underline{k}$, $\underline{B}=2\underline{i}+\underline{j}-\underline{k}$,$\underline{C}=\underline{i}+3\underline{j}-2\underline{k}$ হয় তবে $(\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{C}$ নির্ণয় কর ।

একক কাজ

১। ভেক্টর ত্রিগুণফলের সূত্রটি লিখ ।

২। স্কেলার ত্রিগুণফলের সূত্রটি লিখ ।

৩ ।একটি সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ $\overline{a}$ ও $\overline{b}$ হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত?

৪ ।$\Delta = 4\hat{i} - \hat{j} + 3k\hat{}$ এবং $\underline{B} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2k\hat{}$ ভেক্টর দুইটি লম্বভাবে ছেদবিন্দুতে তাদেও সমতলের উপর লম্ব বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর ।

পাঠ মূল্যায়ন

১ ।একটি ত্রিভুজের দুইটিসন্নিহিতবাহু$\overline{a}$ ও $\overline{b}$হলেত্রিভুজেরক্ষেত্রফলকত?

২ । একটিসামান্তরিকের দুইটিসন্নিহিতবাহু$\overline{a}$ ও $\overline{b}$ হলেসামান্তরিকেরক্ষেত্রফল কত?

৩ ।একটি সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ $\overline{a}$ ও $\overline{b}$হলে সামান্তরিকেরক্ষেত্রফল কত?

৪। $A = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\underline{B} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটিলম্বভাবেছেদবিন্দুতেতাদেও সমতলেরউপর লম্ব বরাবর একক ভেক্টরনির্ণয় কর।

বাড়ীর কাজ

সমস্যা-১: দেখাও যে ,ভেক্টরদ্বয় $2\underline{i}-3\underline{j}-\underline{k}$ এবং $-6\underline{i}+9\underline{j}+3\underline{k}$ পরস্পর সমান্তরাল।

সমস্যা-২: একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো যথাক্রমে A(1,2,3), B(2,5,-1) , (-1,1,2) হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর?

সমস্যা-৩: একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{A}=2\underline{i}-3\underline{j}-4\underline{k}$ $\underline{B}=\underline{i}+2\underline{j}+\underline{k}$ $\underline{C}=3\underline{i}-\underline{j}-2\underline{k}$ হলে ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

সমস্যা - ৪ : একটি সামন্তরিকের কর্ণদ্বয় $4\underline{i}+2\underline{j}+3\underline{k}$ এবং $2\underline{i}-3\underline{j}+\underline{k}$ হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর?

সমস্যা-৫: একটি সামন্তরিক ঘনবস্তুর বাহুগুলো $\underline{A}=\underline{i}-2\underline{j}-3\underline{k}$, $\underline{B}=2\underline{i}+4\underline{j}+\underline{k}$, $\underline{C}=-2\underline{i}+3\underline{j}+2\underline{k}$ হলে এর আয়তন নির্ণয় কর ।


THANK
YOU